# PRÆLECTIONES MATHEMATICÆ

Ex

# WOLFIANIS ELEMENTIS ADORNATÆ,

atqué ſic

Uſui AUDITORUM MATHESEOS ACCOMODATÆ;

Ut quæ ibi prætermiſſa, vel in alium locum rejecta deſiderari poterant â Tyronibus, adjicerentur; Quæ verò vel obſcuritatis, vel prolixitatis accuſari ſolebant, dilucidiùs & breviùs exponerentur

à P. JACOBO NAKCYANOWICZ S. J.

AA.LL. & Philoſophiæ Doctore, in Academia & Univerſitate Vilnenſi Publico ac Ordinario Matheſeos Profeſſore



## TOMUS PRIMUS

Qui commentationem de Methodo Mathematica Arithmeticam, Geometriam, Trigonometriam Planam & Analyſim complectitur.

VILNÆ

Typis S. R. M. Academicis

Annô 1759.

Illuſtriſſimæ & Excellentiſſimæ

DOMINÆ

ELISABETHÆ de

OGINSCIIS

**PUZYNINÆ**

Caſtellanæ Mſciſlavienſi, Capitaneæ Triſcenſi &c. &c.

T*Antum abeſt, ut conquirendae ſint cauſae cur tuo potiſſimum* NOMINI ILLUSTRISSIMA CASTELLANA *haec Mathematum Elementa inſcribam, ut potius ſive Dignitatis tuae ampliſſimae, ſive in ſcientiam hanc eximiae liberalitatis tuæ ratio ſpectetur, ea jure ſuo omnino ad te pertinere videatur.*

*Dignitas equidem Tua excellentiſſimo* DUCUM OGINSCIORUM *ſangvine orta,* DUCIBUS *itidem* PUZYNIS *conjuncta, perqué* Viros *totius Poloniae ac Lithvaniae* Principes *diffuſa, imò ad* Regum *uſqué ſangvinem pertingens ea eſt, à qua ſuus honor ſuuſquè amor, quem in tot Regibus Auguſtiſſimiſqué Imperatricibus caeteriſqué ampliſſimis Viris ab omni aevo hac praecipue aetate noſtra ſuſpeximus, & admirati ſumus in ejuſmodi ſcientiam cumulatiſſimè redundat. Beneficentiam verò ac liberalitatem tuam in rem noſtram ecquis in Te maximam ac profuſiſſimam non videat? cum palam ſit univerſo Poloniae Regno tibi uni Mathematicas Artes uſqué eò in deliciis & amoribus fuiſſe, ut in hac Alma Academia & Univerſitate exſtruendae Speculae Aſtronomicae ſumptus copioſè ſubpeditâris; quin etiam ſi per ſummam temporum difficultatem id tibi licitum fuiſſet, cerneremus jam pridem eam Academiae noſtrae acceſſiſſe celebritatem, quam aliarum gentium Academias ab Aſtronomicis obſervationibus conſecutas fuiſſe accepimus.*

*Nequé*

*Nequé nunc ita ſum animo conſtitutus, ut de tuo in rem Mathematicam ſingulari ſtudio non plura à te ſibi Academia ſperare debeat, quàm quae omnium Literatorum ſpes concipere poſſunt. Sed longus ſatis forem, ſi hoc loco cùm vetera tum recenter à Te Nobis benevolentiae argumenta luculenter declarata percenſerem. Quapropter ut ipſo facto potius teſtaremur, quanti ea faciamus, quae à Te in Nos inqué rem augendam literariam profecta ſunt, hoc velim Matheſeos univerſae opus in perpetuum Tibi extet tui tam inſignis beneficii, noſtriqué officii monumentum. Id quod & Amplitudo* Nominis tui *jure ſibi vendicat & gratus animus noſter debet, benevolè à Te acceptum iri ſpero.* DEUS O. M. *Te Nobis ſervet diu incolumem.*

*Digna enim es, ut millenos annos vivas, antequam* Novum Sidus *accedas Aſtris,*

*Aſtris, in quod Omnes quotquot Nos conſequentur Mathematum Studioſi mentis oculos defigentes memori illud fideliqué animo velut è Specula caetera Aſtra, perpetuo contemplentur.*

Illuſtriſſimæ
Meritiſſimæqué Dignitatis
& Excellentiæ tuæ

Obſervantiſſimus cultor
Jacobus Nakcyanowicz
è Societate JESU.

Vilnæ
1. 7bris 1759.

PRÆFATIO

# PRÆFATIO.

VUlganti mihi Prælectiones Mathematum Academicas duo ſeſe offerunt, quorum reddenda videtur eſſe ratio: alterum, quod præter communem Multorum conſvetudinem non propria, ſed Cl. WOLFII Elementa in uſus Academicos danda judicârim; alterum, quòd quædam prætereundo, alia adjiciendo, nonnulla etiam immutando opus hoc Illuſtr: Viri quaſi innovare auſus fuerim. Etenim hac ſuper re cûm maturè deliberarem, varios & ſatis mul-

tos de Mathefeos principiis evolvi libros; in omnibus res eafdem aliis atqué aliis verbis expreffas legi; novi verò in plerifqué præter earum confufionem & præpofterum ordinem ferme inveni nihil. Alii enim toti in praxibus non principia, fed jam ufus eorum tradunt; alii vero id agunt, ut videantur planè non perfpicere & intellectum humanum fic à natura comparatum, & ipfas fcientias ita ordinatas, ut nifi hæ debito ordine, Euclidæa methodo, diftinctifqué notionibus proponantur, ille nihil unquam rectè cognofcere poffit. Unde cum Arithmetices ftudio jam Algebram, jam Geometriam conjungunt; atqué fic è multis diverfis omnino inter fe fcientiæ partibus unum quoddam confufum chaos difcentibus proponunt,quod ( fi vel maximè ipfi intelligant ) aliis diftinctè explicare minimè poffunt. Ea eft Hominum iftorum infelicitas, ut cùm amplificare ingenuas

artes

artes & communi bono maximè prodesse laborant, illis non parùm officiant, huic detrimentum non leve afferant. Nam cùm Mathesis ea sit Scientia, quæ mentem nostram cùm in omnibus aliis, tum præcipuè in Severioribus Disciplinis ad veritatem scitè inveniendam instituat, atqué summopere perficiat, Homines verò illi viam ad eam rebus sine ordine congestis difficilem, confragosam & planè inviam reddant, aditum nobis ad rerum cognitionem præcludunt; ut non modo ad novas suis è latebris veritates eruendas, verùm ne ad erutas quidem perfectè cognoscendas perveniamus. Quare ea Tyronibus principia existimavi semper esse tradenda, quæ & nulli confusioni obnoxia, & accuratâ methodo conscripta, ac proinde perspicua sint ac facilia.

Hujusmodi verò cùm non meo solùm, verùm multarum etiam Universitatum judiciô Wolfii Elementa habeantur, ea Prælectionum Mathematicarum

earum loco aſſumenda eſſe exiſtimavi; maluiqué aliena tradendo id quod jam optimè ſcriptum eſt, docere, quàm quod docendum ſit, ſcribere.

Quia verò Vir ille Sapientiſſimus Elementa ſua iis præcipuè, qui omnem ferme vitam Mathematicis in diſciplinis exacturi eſſent, ſcripta voluit, quædam copioſiûs, nonnulla ſubtiliùs, multa etiam parciore calamô perſtringendo tradidit; ut aliis immorandi, aliis ſpeculandi, aliis etiam nova inveniendi maturè occaſionem offerret; Ego plurimos hic nactus Auditores, quibus totum vitæ curriculum iis in ſtudiis abſolvere integrum non eſt, ut Eorum & commoditati & neceſſitati magis conſulerem, alia ſtrictiùs contrahere, quædam clariùs exponere, nonnulla etiam addere neceſſe habui; ne aut fuſiora legentibus, aut profundiora vel occulta ſcrutantibus, tempus aliis deſtinatum, elaberetur. Nihil tamen quod ad perfectam Mathematum cognitionem opus eſt miſſum feci. Nolui enim

cùm

cùm prodeſſe quibuſdam ſtuderem aliis obeſſe: Quin etiam cuivis perſvaſum eſſe velim, Eos, qui omnia, quæ hic ſunt tradita plenè & perfectè comprehenderint, multa in ipſo Authoris opere longè faciliùs cogniturros, dum uberiorem quorundam explicationem, quam ibi deſiderabant, legerint. Algebræ, quam perperam ut dictum nonnulli cum Arithmetica conjungunt, nullam hic, ne ab accurata methodo recederem, mentionem feci, verum ſervato ſcientifico ordine Arithmeticam primum, tum Geometriam, Trigonometriam planam, Algebram, deinde reliquas Matheſeos partes propitiis Superis ad uſus Academicos pervulgandas curabo.

DE ME-

# DE
# METHODO
# MATHEMATICA

## PRÆFATIO.

*SI quid mei judicii eſt, operam non inanem ſumit, qui Methodum Mathematicorum diligentiſſimè rimatur. Ejus enim vim qui tenet, is non modo ad Mathemata percipienda animum, quantum poteſt attendit & rationes evidentiae illorum funditus perſpicit; verùm ad alias etiam diſciplinas, ut ut labore non adeò facili,*

*cum*

*cum fructu tamen omnino insigni, eandem transfert. Quodsi verò Mathesis non aliam, praeter hanc unicam Cultoribus suis afferret utilitatem, eidem tamen diligenter incumbere deberent quotquot disciplinarum studia ingrediuntur. Eumqué in finem studium Mathematicum tantopere commendant Viri Docti ac intelligentes, quos inter* (*a*) Lockium (*b*) Malebranchium (*c*) Tschirnausium *nominasse sufficiat. Quorum in Philosophia rationali illustranda solertia haud paucorum opinionem vicit. De Methodo igitur Mathematica commentationem, mole exiguam, sed rerum ubertate gravem Elementis Matheseos Universae praetermisi, ne in iis desiderarer pati industriam meam, quorum ad rectè philosophandum quam maximè necessaria est cognitio:* ( *d* ) *inprimis cum exiguus admodum sit Eorum numerus, quibus interiora methodi sunt perspecta; multò minor autem*

( *a* ) In Tract: *De directione ingenii*
( *b* ) *De inquirenda veritate l. 6. c. 6. & 7.*
( *c* ) *In Introductione ad Mathesin & Physicam.*
( *d*) *Legatur Caput I, V. & VI. praesertim Logicae.*

*autem illorum, qui methodo Mathematica promptè utuntur. Caeterum haec commentatio de methodo ſingulari cum attentione perlegenda, & ubi Arithmeticae ac Geometriae Elementa evolvuntur, praecepta Methodi ſunt relegenda; tum ut penitus intelligatur, tum ut appareat, quomodo iis ſatisfiat. Ita demum Matheſeos ſtudium verè acuet intellectum.*

# DE METHODO MATHEMATICA BREVIS COMMENTATIO.

§. I. Nomine Methodi Mathematicæ intelligitur ordo, quo in tradendis dogmatis ſuis utuntur Mathematici.

§. II. Ordiuntur autem Mathematici à Definitionibus: inde ad axiomata & poſtulata; in Matheſi mixta, ad experentias, ſeu obſervationes progrediuntur: his tandem Theoremata & Problemata ſuperſtruunt: ubiqué verò corollaria & ſcholia, ſi è re viſum fuerit, annectunt.

§. III. Sunt autem Definitiones primæ rerum notiones, quarum ope inter ſe diſtingvuntur, & unde quæ de ipſis concipiuntur, reliqua deducuntur.

§. IV. Per notionem quamlibet, ejuſdem rei in mente repræſentationem intelligo.

§. V. *Notio clara* eſt, quæ ad rem oblatam recognoſcendam ſufficit: e. g. quòd figura data ſit triangulum.

§. VI. *Obſcura* eſt *notio*, quæ ad rem oblatam recognoſcendam non ſufficit. Talis eſt e. g. Plantæ; ad cujus conſpectum dubitas utrum ea ſit, nec ne, quam alio tempore alibi videras, & cui hoc vel illud, nomen tribui ſolet.

§. VII. *Clara notio distincta* habetur, si notas recensere valeas, ex quibus rem oblatam recognoscis, e. g. quod circulus sit figura lineâ curvâ in se redeunte terminatâ cujus singula puncta ab eodem puncto intermedio æqualiter distant.

§. VIII. *Confusa* est *notio clara*, si notas ex quibus rem oblatam recognoscis recensere minimè valeas, ut ut in tales sit resolubilis, qualis est e. g. notio coloris rubri.

§. IX. *Distincta notio adaequata* dicitur, si & notarum ex quibus componitur, notiones distinctas habueris; e. g. notio circuli §. 7. tradita censetur adæquata, ubi curvæ in se redeuntis, puncti intermedii, distantiæ æqualis & terminationis notiones distinctas habueris. Notæ vero dicuntur rebus intrinseca, unde res agnosci, & ab aliis valent distingvi.

§. X. In hac Analysi cum progredi liceat donec ad notiones irresolubiles perveniatur, notionum adæquatarum dari gradus manifestum est.

§. XI. *Inadaequata est notio*: Si notarum, quæ distinctam notionem ingrediuntur nonnisi confusas notiones habueris.

§. XII. Definitiones Mathematicæ omnino distinctæ & quantum fieri potest, aut pro re nata sufficit adæquatæ sint oportet.

§. XIII. Hinc in definitionibus, vocibus non utuntur subsequentibus, nisi vel ex antecedentibus vel aliunde satis intelligatur, quæ res iis subiiciantur.

§. XIV. Definitiones verò ad duas classes commodè revocantur; sunt nimirum aliæ nominales, aliæ reales.

§. XV. *Definitio nominalis:* est enumeratio notarum ad rem oblatam ab aliis distingvendam sufficientium: talis est quadrati, si figura quadrilatera æquilatera rectangula esse dicatur.

§. XVI. *Definitio realis* est notio distincta rei gene-

genesim, hoc est modum, quò fieri potest, exponens. Talis in Geometria est circuli, si per motum lineæ rectæ circa punctum fixum describi concipitur.

§. XVII. Definitiones tam reales, quàm nominales, cum in se considerari, tum inter se conferri possunt. Quidquid ex consideratione eorum, quæ in una definitione continentur immediatè deducitur *Axioma* vocatur, si quid rei convenire aut non convenire enuntiet. *Postulatum* verò si quid effici posse affirmet vel neget. e. g. Ex genesi circuli liquet, *omnes rectas ex centro ad peripheriam ductas inter se aequales; esse* cùm unam, eandemquè lineam in diverso situ referant. Hæc adeo propositio in axiomatum numero habetur. Sed dum per eandem definitionem intelligitur: *ex quovis puncto, quovis intervallô circulum describi posse:* id inter postulata collocatur.

§. XVIII. Quoniam igitur Axiomatum & Postulatorum veritas per intuitum Definitionum, ex quibus fluunt, cognoscitur, demonstratione nulla indigent. Vera enim esse intelliguntur, quam primùm realitas Definitionum innotescat.

§. XIX. Multi hac axiomatum proprietate abutuntur, dum præmissas syllogismorum, quas probare nesciunt pro Axiomatibus venditant. Hinc videas in Axiomatum numerum referri propositiones, quas sine probatione non admittunt intelligentes.

§. XX. Cum Axiomatibus & postulatis etiam *experientiae* nonnunquam confunduntur. *Experiri autem dicimur, quidquid ad perceptiones nostras attenti cognoscimus.* e.g. dum accensâ candelâ videmus ea, quæ ante non apparebant.

§. XXI. Experientiæ itaquè sunt rerum singularium, quoniam nonnisi res singulares percipimus.

§. XXII. Mathematici experientias à conclusionibus inde deductis accuratè distingvunt: aliis ut plurimum has cum illis confundentibus. e.g. quod can-

delâ accenſâ corpora, quæ ante non apparebant in conſpectum prodeant per experientiam innoteſcunt, quodſi verò perpendens lumen in cauſa eſſe cur tenebris diſcuſſis appareant, & unà expendens rerum naturalium eôdem modô ſe habentium eundem eſſe effectum, infero: *Quidquid lumine collustratur, videri poteſt*, hæc Propoſitio, non in experientiarum, ſed concluſionum per legitimam conſequentiam numerum referenda.

§. XXIII. Iſtiusmodi concluſiones omiſſis experientiis commemorantur, ſi modus quô ex his eliciuntur omnibus fuerit notus. Quodſi verò non appareat, quomodo propoſitio data ex prævia quadam eliciatur experientia; caſus ſingularis omnino adducendus, ut ratio deductionis ad examen revocari poſſit.

§. XXIV. *Propoſitio Theoretica ex pluribus Definitionibus inter ſe collatis eruta* Theorema appellatur. e. g. Si in Geometria, Triangulum cum Parallelogrammo ſuper eadem baſi & ejuſdem altitudinis confertur, & partim immediatè ex ipſis eorundem definitionibus, partim ex aliis ipſorum proprietatibus jam ante erutis confertur; *Parallelogrammum eſſe trianguli duplum*: ea propoſitio in Theorematum numerum referenda.

§. XXV. Duo autem ſunt, quæ in omni Theoremate attendantur: *Propoſitio* nempe, atque *Demonſtratio*. Propoſitio enuntiat, quid rei cuidam ſub certis conditionibus convenire poſſit, quid non: Demonſtratio rationes exponit, ob quas intellectus illud ipſi convenire judicat.

§. XXVI. Hinc quælibet propoſitio in *Hypotheſin* & *Theſin* commodè diſtingvitur, Hypotheſis conditiones recenſet, ſub quibus aliquid affirmatur, vel negatur, hæc verò complectitur, quod affirmatur, vel negatur e. g. in Propoſitione allata hypotheſis eſt: Si *Triangulum & Parallelogrammum ſuper aequali*

*baſi*

*basi & ejusdem altitudinis existant;* Thesis autem, *Parallelogrammum hujus dimidium est.*

§. XXVII. Notandum verò si propositio fuerit cathegorica, tum ipsam definitionem subjecti esse hypothesim, licet ista hypothesis distinctè non exprimatur. e. g. Si *tres in triangulo anguli* 180 *graduum* dicantur, hypothesi carere videtur Propositio, quæ tamen statim comparet, si pro voce trianguli definitionem ejus substituas. Ita enim habet propositio: si *quaedam figura tribus lineis rectis terminetur, tres habet angulos junctim sumptos* duobus rectis æquales. En hypothesim, quæ urget, ut tres lineæ rectæ spatium comprehendant.

§. XXVIII. *Nexum* aut *repugnantiam* inter Thesim & Hypothesim in propositionibus *Demonstratio* manifestat. Eorum igitur Definitiones, quæ in hypothesi ac Thesi continentur, eorundemque proprietates ex istis derivatæ, aut aliunde cognitæ demonstrationum principia existunt.

§. XXIX. Quoniam verò in Mathesi principia non admittuntur, nisi quæ ante fuerint evicta, Definitiones ac propositiones, quibus Demonstrationes superstruuntur citari solent, partim ut appareat genuina principia adhiberi, partim ut ignaris constet unde ipsorum certitudo petenda.

§. XXX. Ex citationibus itaque liquet, quænam, & quam multa, supponenda sunt, & quo ordine procedendum, ut ritè percipiatur demonstratio propositionis.

§. XXXI. Ratio ex principiis conclusiones inferendi eadem est, quæ in Logica docetur. Sunt enim demonstrationes Mathematicæ congeries quædam Enthymematum, ita, ut omnia vi Syllogismorum concludantur, omissis saltem præmissis, quæ vel sponte meditanti occurrunt, vel per citationes in memoriam revocantur.

§. XXXII. Problemata facienda proponunt, & tribus partibus constant, *Propositione, Resolutione*, ac *Demonstratione*. In *Propositione* quid fieri debeat indicatur. In *Resolutione* singuli actus ordine debito recensentur, quibus efficitur quod erat faciendum. In *Demonstratione* evincitur factis iis quæ Resolutio præcipit effectum intentum obtineri. Quoties itaque Problema demonstrandum, in Theorema convertitur, cujus Hypothesim Resolutio, Thesim verò Propositio constituit.

§. XXXIII. Si ex Propositionibus generalibus eruantur 1mo vel Propositiones *particulares in specie*, vel 2do aliæ quædam *universales in genere*, dictæ Propositiones *Corollaria* dicuntur. Primum Corollariorum genus Demonstratione non indiget, non item alterum. quoties itaque ex aliis Propositionibus aliquid generaliter infertur, ratio illationis indicanda. e. g. Si ex Theoremate illo: *Tres anguli sunt aequales duobus rectis in omni triangulo*, eruatur hoc corollarium, in *triangulo rectangulo unus tantum actu rectus angulus esse potest*. Ratio illationis non negligenda, quòd scilicet positis duobus actu rectis tertius nihilo æqualis foret.

§. XXXIV. In scholiis denique tam definitionibus, quam propositionibus, earumque corollariis subjungi solitis obscura explicantur, ad dubia respondetur, usus doctrinarum indicatur, historia ac fontes inventionum describuntur, & si quæ alia scitu nec injucunda nec inutilia occurrunt, inseruntur.

§. XXXV. Superest ut ad objectiones duas respondeam, quas contra methodum Geometrarum afferre solent ii præsertim, qui lucro & pecuniæ corrogandæ intenti, totos se praxi condiscendæ dedêre. Nempe 1mò vitio vertitur Geometris, quòd multa definiant & probent, quæ definitione & probatione non indigent. 2dò Quòd ordinem, quô generaliora & simpli-

ſimpliciora ſpecialibus & compoſitis præponi neceſſe eſt, negligant, nec ad unum argumentum pertinentia unô locô ponant.

§. XXXVI. Sed ſciant ii ( utor verbis omnium laude Academiarum in re Mathematica viri celebratiſſimi Volfii) (*a*) *Nos & Theoriam & Praxim aeſtimamus quamvis non eodem, ſed ſuô unamquamqué pretiô, ut utriqué ſuus habeatur honor.* Viri autem boni ii, *quibus natura manus, locò ingenii dediſſe cenſetur,* (*b*) viderint, ne de Theoria, dequé Methodo Geometrarum ingenii locò manibus judicent; & ſiquidem lucri quam ſcientiæ cupidiores ſint, ut felicius fine ſuo potiantur, ( per nos licet) cujusqué ſortis etiam praxibus condiſcendis dent operam; dummodo aliquando Geometras non minùs ſtolidè quàm impudenter carpere deſinant eò, quod nimii ſint in definiendo & probando, Enimverò ut cum omnibus ſcientiis, tum præſertim Geometriæ laudi veriſſimæ ab omnibus viris mentis ſanioris ducitur rigor in demonſtrando.

§. XXXVII. Sed nequé ordo jure taxatur, ſine quo demonſtrationes accuratæ dari non poſſunt, eô nimirum ordine ſingula proponenda ſunt, quô unum ex altero faciliùs infertur. Quare cùm ſatis experiamur id fieri minimè poſſe, ſi in unum cumulum congerantur, quæ de ſubjecto eodem cognoſci poſſunt *Ordo Scholae* Philoſophis vulgaribus, Practicis, cæteriſqué mentis hebetioris relinquendus, à Geometris verò, aliiſqué viris quibus res profundiùs rimari datum eſt, *ordo naturae* retinendus.

(*a*) *Tomo V. cap: 6. de ſtud: Hydroſt:* §. 267. (*b*) *Ibid:*

# ELEMENTA ARITHMETICÆ
## CAPUT I.
### *De principiis Arithmeticæ,*

DEFINITIO I.

§. I. Arithmetica est *Numerorum scientia.* Pars ejus *Practica* est *Scientia computandi;* id est ex quibusdam numeris datis inveniendi alios, ut si fuerit inveniendus numerus, qui duobus 6 & 8 simul sumptis sit æqualis.

DEFINITIO II.

2. *Unum* est, quod ita est aliquid, ut aliud præterea idem esse nequeat.

DEFINITIO III.

3. *Unitas* est abstractũ, per quod dicimꝰ unũ.

DEFINITIO IV.

4. *Unitates eædem* sunt, quæ per eandem notionem cognoscuntur. *Diversæ* sunt, quæ cognoscuntur per diversas.

SCHOLION.

5. *Ex: gr: Si A sit globus lapideus, B itidem globus lapideus, erunt A & B unitates eaedem, sed si A fuerit globus lapideus, C plumbeus, erunt A & C unitates diversae. Quod si A, B, & C tantùm ut globos consideres, erit etiam C eadem unitas cum A & B* (§. 3.)

DEFINITIO V.

6. Si A sit unum, B sit unum, C sit unum D sit unum &c. non tamen B, C, D, &c. sint idem cum A, erunt A, B, C, D, &c. *Plura* seu multa.

DEFI-

DEFINITIO VI.

7. *Multitudo* est abstractum, per quod dicuntur plura.

DEFINITIO VII.

8. Si A sit idem cum B,C,& D simul sumptis, dicetur A *Totum*, B verò C & D dicentur ejus *Partes*: & intuitu partis B, reliquas C,& D &c.*complementum ad totum* vocabimus.

DEFINITIO VIII.

9. Quidquid refertur ad unitatem,ut linea recta ad aliam rectam *Numerus* dicitur.

SCHOLION I.

10. *Si pro unitate linea recta sumatur, numerus quoque exprimi potest per rectam.*

SCHOLION II.

11. *Generaliter definitur numerus, ut sub eàdem definitione numeri integri & fracti rationales & irrationales veniant.*

DEFINITIO IX.

12. *Numerus determinatus* est, qui refertur ad unitatem datam. e. g. 3, 5 &c. pedes digiti &c. *Indeterminatus*; qui refertur ad unitatem vagam; diciturq; *Quantitas*.

SCHOLION.

13. *Ex: gr: Numerus indeterminatus, qui dicitur quantitas est latitudo fluvii. Quod si quaesiveris quanta sit, unitatem quandam ad arbitrium assume e. g. chordam, pedem, cubitum &c. illa unitate assumptâ metire, ac pro diversa unitate assumpta per diversum numerum determinatum latitudinem fluvii enuntia. Latitudo itaque fluvii est quantitas, sive numerus qui refertur ad unitatem vagam hoc est chordam, pedem, cubitum &c.*

DEFI-

DEFINITIO X.

14. *Æqualia* sunt, quorum unum salva quantitate alteri substitui, potest.

*Inæqualia* sunt, si pars unius alteri toti substitui potest.

COROLLARIUM I.

15. Quod alteri salva quantitate substitui potest, alteri æquale est, sed pars unius inæqualium alteri toti substitui potest (§. 14.) Ergo pars unius inæqualium alteri toti æqualis est.

COROLLARIUM II.

16. Similiter cùm unum inæqualium pro alterius parte substitui possit (§. 14.) erit idem alterius parti æquale.

HYPPOTHESIS I.

17. *Signum aequalitatis est* ==

DEFINITIO XI.

18. *Majus* est, cujus pars alteri toti æqualis est. *Minus* quod parti alterius æquale.

COROLLARIUM

19. Cùm pars unius inæqualium A, alteri toti e.g. B æqualis sit (§. 15.) & viciffim B æquale parti ipsius A (§. 16.) inæqualium unum A majus, alterum B minus est.

HYPOTHESIS II.

20. *Signum maioritatis est* > ; *minoritatis* <.

DEFINITIO XII.

21. *Similia* sunt, in quibus ea eadem sunt, per quæ à se invicem discerni debebant. *Dissimilia* sunt, in quibus ea diversa sunt, per quæ à se invicem discerni debent. Itaqué *Similitudo* est identitas; *Dissimilitudo* diversitas eorum, per quæ res à se invicem discerni debent.

CO-

COROLLARIUM I.

22. Nihil ergo in uno similium est, quod non æquè sit in altero, modó ejusmodi sit, ut sine alio assumpto cognosci possit.

COROLLARIUM II.

23. Cùm quantitas sine alio assumpto per se non cognoscitur ( § 12, 13. ) similia salva similitudine quantitate differre possunt. Atqué adeò quantitas est discrimen internum similium.

HYPOTHESIS III.

24. *Signum similitudinis est* ∽

DEFINITIO XIII.

25. *Pars aliquota* est, quæ aliquotiés repetita integro est æqualis. *Pars aliquanta* est quæ repetita aliquoties semper vel major vel minor est totô.

DEFINITIO XIV.

26. *Commensurabilia* sunt, quæ partem aliquotam communem habent; vel quorum unum est pars aliquota alterius. *Incommensurabilia* sunt, quorum nulla datur pars aliquota communis.

DEFINITIO XV.

27. *Quantitates homogeneæ* sunt, quarum una aliquoties sumpta alteram superare potest; seu quarum una ab altera ablata tandem vel nihil, vel se minus relinquit. *Heterogeneæ* sunt, quarum una aliquoties sumpta alteram superare non potest.

DEFINITIO XVI.

28. *Numerus numerans* est, cujus unitas denotat ens in genere. *Numerus numeratus* est,

cujus

cujus unitas denotat ens in ſpecie.

SCHOLION

29. *Ex: gr: Si quis ſimpliciter dicat ſex: is non determinat, quaenam ſint illa Entia quae numerantur, adeoque pronuntiat numerum numerantem. Contra ſi quis dixerit cum addito,* Sex globi aurei, *is ſpeciem entium determinat, & pronuntiat Numerum numeratum, vocant nonnulli primum* abſtractum, alterum *numerum* concretum.

DEFINITIO XVII.

30. *Numeri inter ſe homogenei* ſunt, qui ad eandem, *Heterogenei*, qui ad diverſas unitates referuntur.

SCHOLION.

31. *Haec diviſio numerum numeratum potiſſimum reſpicit. Omnis nempe numerus determinatam aliquam unitatem ſupponit (§. 9.) Determinatur ea per notionem, ad quam in numerando reſpicimus. (§. 4.) Hinc tres globi aurei, & ſex argentei ſunt inter ſe heterogenei, ſed tres globi aurei & ſex itidem aurei, homogenei ſunt numeri.*

DEFINITIO XVIII

32. *Numerus integer* eſt, qui refertur ad unitatem, tanquam totum ad partem.

DEFINITIO. XIX.

33. *Numerus fractus* eſt, qui refertur ad unitatem, tanquam pars ad totum, dicitur is etiam *fractio*, item *Minutia.*

DEFINITIO XX.

34. *Numerus rationalis* eſt, qui unitati eſt commenſurabilis, ſeu qui intelligi poteſt quantus eſt reſpectu unitatis; vocatur etiam *effabilis.*

DEFI-

DEFINITIO XXI.

35. *Numerus rationalis integer* eſt, cujus pars aliquota eſt unitas.

DEFINITIO XXII.

36. *Numerus rationalis fractus* eſt qui unitatis parti aliquotæ, aut aliquot partibus aliquotis æqualis eſt.

DEFINITIO XXIII.

37. *Numerus irrationalis mixtus* eſt, qui conſtat ex integro & fracto, ſeu ex unitate & fracto.

DEFINITIO XXIV.

38. *Numerus irrationalis*, ſive *ſurdus* eſt, qui unitati eſt incommenſurabilis; ſeu de quo non poteſt intelligi, quanta ſit pars unitatis, vel quanta ſit ejus pars unitas. Vocatur etiam *ineffabilis*, item *Geometricus*.

HYPOTHESIS IV.

39. Si in numerando ad denarium pervenitur initium numerandi repetatur, ſed tamen denariorum numerus exprimatur.

COROLLARIUM.

40. Decem itaque nominibus opus eſt ad decem numeros rationales primos exprimendos & præterea aliis, quibus decadum multitudo denotetur, & ita porro.

SCHOLION.

41. *Lex numerandi, quam in hypotheſi tradimus, ubivis (quantum conſtat) gentium recepta. Enimvero non modo Erhardus Weigelius tetractycam, ſed* celeberrimus Leibnitius *binariam arithmeticam excogitavit*, (c) *nonniſi duabus notis* 1 *&* 0 *utentem*.

tem

(c) *Hiſt. de l' Acad. Royale des Sciences An.* 1703. p. 175. *& ſequ: Edit Awſtel:*

*tem.* Sereniſſimus Carolus XII. Rex Sveciæ *calculum ſexagenarium excogitavit referente* Emmanuele Svedenborgio ( *d* ) *Arithmetica verò decadica quâ vulgo utimur denario digitorum numero procul dubio originem debet; digitis enim in computando utimur, quamdiu in computo nondum ſatis verſati.*

DEFINITIO XXV.

42. Decem illa nomina, quibus in numerando utimur, ſunt: *Unum, Duo, Tria, Quatuor, Quinque, Sex, Septem, Octo, Novem, Decem.* Idem numeri generaliter vocantur unitates, nec opus eſt ut definiantur: dicuntur etiam digiti. Ex decem unitatibus componitur una *Decas.* Duæ decades dicuntur *Viginti*, tres *Triginta*, quatuor *Quadraginta*, quinque *Quinquaginta:* Sex *Sexaginta*, ſeptem *Septuaginta*, octo, *Octoginta*, novem *Nonaginta.* Ex decem decadibus componitur *Centenarius*, ex decem centenariis *Millenarius*, ex mille millenariis *Millio* ex mille millenariis millionum *Billio:* ex mille millenariis billionum *Trillio* &c. Denarius, ejuſqué quævis multipla dicentur articuli.

HYPOTHESIS V.

43. *Notae numeraricae ſunt novem ſequentes* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *ut verò non ſolum unitates,* ſed *& decades, centenarios millenarios &c.* deſignent, valor ipſis tribuatur localis: ita ut ſolitariæ, *vel in loco* dextimo poſitæ, unitates, *in* ſecundo *decades*, in tertio *centenarios*, in quarto *millenarios* &c. *deſignent. Loca*

(*d*) *In Miſcellan: Berolin: p.* 336. *& ſequ:*

*ca vacua repleantur cyphra* o, *quae ſcilicet ſit nullitatis nota.*

COROLLARIUM I.

44. Numerorum itaqué partes hoc ordine ſunt.

| | |
|---|---|
| Unitates<br>Decades<br>Centenarii | Simplices |
| Unitates<br>Decades<br>Centenarii | Millenariorum |
| Unitates<br>Decades<br>Centenarii | Millionum |
| Unitates<br>Decades<br>Centenarii | Millenariorum Millionum |
| Unitates<br>Decades<br>Centenarii | Billionum |
| Unitates<br>Decades<br>Centenarii | Millenariorum Billionum &c. |

SCHOLION I.

45. *Characterum arithmeticorum electio arbitraria. Hinc apud varias gentes varii occurrunt. Non tamen omnes aeque commodi. Id quod has cum illis conferentes experiuntur. Ab Arabibus inventae vulgò feruntur.* Sed *ipſe Arabs ALSEPADI teſte* Celeberrimo Vallìſio ( *d* ) *inventionis laudem Indis defert.* In *Europam illatos ſunt qui circa annum C.* 999 & ſunt qui uſqué circa A. C 524 *autument; quod Criticis relinquimus.*

SCHOLION II.

46. *Ex collatione diverſarum figurarum numeralium diſcant velim, qui artem inveniendi cordi habent,* quan-

( *d* ) *Arithm. oper: c.* 9. *ſ.* 48. *vol.* 1. *oper: Mathem:*

*quantum momenti in eo ſitum, ut ars characteriſtica perficiatur.*

COROLLARIUM II.

47. Si notis numericis ſubſtituantur literæ ad placitum electæ, iiſqué idem tribuatur valor, qui illis tribui ſolet (§. 43.) numerus occultè ſcribi poterit.

SCHOLION III.

48. Ex;gr: *Denotent literae infrà ſcriptae in ſecunda ſerie eoſdem numeros, quos deſignant notae ſuperiores ſuprà ſcriptae in prima ſerie.*

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.
b. c. d. e. f. g. h. i. k. l.

erit 3748. = d h e i.

PROBLEMA I.

49. *Numerum ſcriptum enuntiare, hoc eſt cuilibet characteri valorem competentem aſſignare.*

RESOLUTIO.

I. Nmerus propoſitus per commata dividatur in claſſes, tres notas unicuiqué aſſignando initiô à dextris factô.

II. Nota dextima, tertiæ claſſis notetur lineola trasverſa ad apicem; nota dextima claſſis quintæ notetur duabus lineolis, dextima 7mæ 3bus &c.

III. Comma ſolitarium enuntietur per millenarios, lineola transverſa una per milliones, duæ per Billiones, tres per triliones &c. nota verò ſiniſtima cujuſvis claſſis per centenarios, media per decades, dextima per unitates proferatur. (§. 44.) *Sic factum quod patebatur. Ex: gr:* Numerus ſequens.

2‴, 125, 473″, 613, 578′, 432, 597

Ita enuntiatur: *Duae Triliones, centum viginti quinque millia, quadringentae ſeptuaginta tres Billiones, ſexcenta tredecim millia, quingentae ſeptuaginta octo milliones, quadringenta triginta duo millia quingenta*

*nonaginta ſeptem.* Noſtro idiomate *Dwa Triliony,ſtodwadżieśćia pięć tyśięcy,cztyryſta śiedmdżieśiąt trzy Billiony, ſześćkroć ſto trzynaśćie tyśięcy pięćſet, śiedmdżieśiąt ośm millionòw,cztèrykroćſto trzydżieśći dwa tyśiące,pięćſet dżiewiędżieśiąt śièdm.*Sive aliter. *Dwa tyśiące tyśiącòw tyśiącòw tyśiącòw tyśiącòw tyśiącòw,* 125 *tyśięcy tyśiącòw tyśiącòw tyśiącòw tyśiącòw,*473 *tyśiące tyśiącòw tyśiącòw tyśiącòw,* 613 *tyśięcy tyśiącòw tyśiącòw,* 578 *tyśięcy tyśiącòw* 432 *tyśiące pięćſet dżiewiędżieśiąt śièdm.*

HYPOTHESIS VI.

50. *Quantitates aut numeros indeterminatos,literis alphabeti minoribus* a, b, c &c. *vel etiam majoribus* A, B, C, *exprimimus.*

HYPOTHESIS VII.

51. *Fractiones per duos numeros exprimuntur, quorum alter alteri interjectâ lineolâ ſubſcribitur. Eorum inferior,ſeu* Denominator *indicat unitatem,ſeu totum in partes diviſum; ſuperior verò ſeu* Numerator, *numerat partes* in caſu propoſito datas. Ex:gr: Duæ partes tertiæ unius lineæ ita ſcribuntur $\frac{2}{3}$: ubi denominator 3 indicat lineam in tres partes æquales eſſe diviſam; numerator 2 duas iſtiuſmodi partes aſſignat.

SCHOLION II.

52. *Subſcribitur numeratori denominator, ut appareat, qualem partem aliquotam cum unitate communem habeat fractus* (§. 36.)

DEFINITIO XXVI.

53. *Additio* eſt inventio alicujus numeri ex duobus vel pluribus homogeneis datis,qui datis ſimul ſumptis eſt æqualis. Numeri dati vocan-

vocantur *ſummandi* quæſitus *ſumma* vel *aggregatum.*

COROLLARIUM

54. Iterata ergo ejuſdem numeri additio eſt inventio numeri alteri cuidam aliquoties ſumpto æqualis, & contra.

HYPOTHESIS VIII.

55. *Signum additionis eſt* + *quod per* plus *efferri ſolet. Ita* 3 + 4 *denotat ſummam ex* 3 *atque* 4, *&* *pronuntiatur:* 3 *plus* 4.

DEFINITIO XXVII.

56. *Subtractio* eſt inventio alicujus numeri ex duobus homogeneis datis, qui cum uno datorum alteri æqualis eſt. Numerus qui ſubducitur, vocatur *ſubtrahendus*; alter à quo ſubtractio fit, *minuendus*, qui invenitur *Differentia*, à nonullis *Reſiduum.*

HYPOTHESIS IX.

57. *Signum ſubtractionis eſt* — *quod per* minus *efferri ſolet.* Ex: gr: 7 — 3 *denotat differentiam inter* 3 *&* 7. *pronuntiatur* 7 *minùs* 3.

DEFINITIO XXVIII.

58. *Multiplicatio* eſt inventio alicujus numeri ex duobus datis, in quo toties continetur datorum unusquoties unitas in altero. Numeri dati dicuntur *factores* item *efficientes*. Quæſitus *Factum:* item *Productum*. In ſpecie factorum unus, qui aliquoties ſumitur, vocatur *Multiplicandus*, qui indicat, quoties ille ſumitur *Multiplicator.*

COROLLARIUM.

59 Siquidem in multiplicatione numerus invenitur alteri cuidam aliquoties ſumpto æqualis, (§. 58.) iſtiuſmodi autem inventio eſt iterata additio (§. 54.) multiplicatio eſt iterata ejuſdem numeri additio.

HYPOTHESIS X.

60. Signum *multiplicationis eſt punctum* (.) *inter factores duos mediô locô poſitum, quod per* multiplicatum *effertur ex. gr:* 4 . 3. *dicitur* 4 *multiplicatum per* 3. Literæ ſæpius ſine ullo ſigno junguntur. ex. gr. a b denotat factum ex a in b; b c d factum, cujus factores b, c, d, ſi autem fuerit factor unus e. g. 3+2, & alter 4. prior parentheſi includitur ſic (3+2) quodſi ambo fuerint compoſiti: uterque parentheſi includitur ſic (4+2) (3+6)

DEFINITIO XXIX.

61. *Diviſio* eſt inventio alicujus numeri ex duobus datis, in quo toties continetur unitas, quoties datorum unus in altero. Numerus, qui dividi debet *Dividendus*; alter per quem fit diviſio *Diviſor;* qui denique indicat, quoties diviſor in dividendo continetur *Quotus* dicitur.

SCHOLION.

62. *In multiplicatione & diviſione opus non eſt ut numeri dati ſint homogenei, quemadmodum in additione & ſubtractione requirebatur* (§. 53. 56.) *id, quod ex ipſarum definitionibus manifeſtum.*

HYPOTHESIS XI.

63. *Signum diviſionis ſunt* ( : ) *quae per* diviſum *efferri ſolent.* ex. gr: 8:4. *denotat quotum ex diviſione* 8 *per* 4 *ſimiliter a : b eſt quotus ex diviſione a per b ſcri-*

*ſcribitur ſubinde* $\frac{a}{b}$, & tunc fractio quotum ex diviſione indicat, ſi verò fuerit dividendus aut diviſor e.g. 6 ÷ 2 diviſum per 2 + 2 parentheſi vel ambo vel alteruter includuntur, ita (6 ÷ 2):(2+2) vel (6 ÷ 2):4

DEFINITIO XXX.

64. *Numerus par* eſt, qui per duo dividi poteſt, ut 4, 12, 16.

DEFINITIO XXXI.

65. *Numerus impar* eſt, qui à pari unitate differt; ut 3 differt unitate à 2, item à 4.

DEFINITIO XXXII.

66. Numerus A *metiri* vel juxta alios *numerare* dicitur numerum B, ſi eum ita dividit, ut quotus ſit numerus integer ſine fractione, vel ſi fuerit pars ejus aliquota. Ita 2 metitur 8 per 4.

DEFINITIO XXXIII.

67. *Numerus primus in ſe* eſt, quem ſola unitas metitur, vel numerat. ut 5, 7, 11.

DEFINITIO XXXIV.

68. Numerus *compoſitus* eſt, quem præter unitatem alius numerus metitur. Ita 4 metitur 8 per 2. Item 2 metitur 8 per 4.

DEFINITIO XXXV.

69. Menſura numeri eſt numerus, qui ipſum metitur. Ita 2 & 4 ſunt menſuræ numeri 8. *Menſura maxima numeri* eſt numerus maximus, qui ipſum metitur. e.g. 4 eſt menſura maxima numeri 8.

DEFINITIO XXXVI.

70. *Menſura communis duorum pluriumve* numerorum eſt numerus, qui ſingulos ſigillatim metitur. Ita 3 eſt communis menſura numerorum 12 & 24. *Maxima dicitur* ſi fuerit numerus maximus, qui omnes metitur. Ita 12 eſt communis menſura maxima numerorum 12 & 24.

DEFINITIO XXXVII.

71. *Numeri primi inter ſe* ſunt, qui nullam communem habent menſuram præter unitatem. Ita 13 & 19 ſunt numeri primi inter ſe.

DEFINITIO XXXVIII

72. *Numeri compoſiti inter ſe* ſunt, qui præter unitatem communem menſuram aliam habent. e.g. 12 & 15.

AXIOMA I.

73. *Idem eſt aequale ſibimet ipſi.*

SCHOLION.

74. *Hujus axiomatis ampliſſimus in Annalyſi eſt uſus. Saepe enim diverſis characteribus exprimitur, & ſibi aequale ponitur.*

THEOREMA I.

75. *Totum eſt majus qualibet ſua parte.*

DEMONSTRATIO.

Cujus pars alteri toti æqualis eſt, id ipſum alterô majus eſt. ( §. 18. ) ſed quælibet pars totius, parti totius, hoc eſt ſibi ipſi æqualis eſt, ( §. 73. ) Ergo totum qualibet ſua parte majus eſt. *Quod erat demonſtrandum.*

SCHOLION.

76. *Ut Syllogiſmi analytici vim atque efficaciam*

*meliùs*

*meliùs percipiant, nequè circa formam argumentandi haereant Tyrones praesertim aut prorsus ignari Logicae, ideo Theorematis alias per se manifesti Demonstrationem apposuimus, quam etiam eam ob causam in lectionibus ad lineas applicabimus. Caeterum ejusmodi per se manifesta Theoremata quae clarissimus Volfius demonstrat, brevitati studentes in numerum axiomatum referemus. Author tamen sum iis qui & acutiore ingeniô fuerint & copiam Volfii habuerint iis ritè percipiendis dent operam priusquam ad ulteriora pedem promoveant, non exiguum inde fructum non in Arithmetica solùm sed etiam in Analysi relaturi.*

AXIOMA II.

77. Quæ æqualia sunt eidem tertio, vel æqualibus æqualia, ea sunt æqualia inter se. Ita si $5 = 3 + 2$ & $4 + 1 = 5$ erit $3 + 2 = 4 + 1$.

AXIOMA III.

78. *Si Æqualibus addas aequalia summae sunt aequales. Ita si* $5 = 3 + 2$ *erit* $5 + 1 = 3 + 2 + 1$.

AXIOMA IV.

79. *Quod majus vel minus est uno aequalium, est etiam majus vel minus altero aequalium; si* $7 > 5$ *erit etiam* $7 > 3 + 2$.

AXIOMA V.

80. *Si majori & minori idem vel aequalia addas, aggregatum prius majus est, posterius verò minus. Multò magis si majori majus & minori minus addas, agregatum priùs majus est, posterius minus, hoc est si* $7 > 3 + 2$ *addas* 2, *erit* $7 + 2 > 3 + 2 + 2$; *multò magis si addas* $7 + 4 > 3 + 2 + 2$.

AXIOMA VI.

81. *Si ab aequalibus auferas aequalia, residua sunt aequalia. Ita si* $5 = 3 + 2$ *erit* $5 - 1 = 3 + 2 - 1$.

AXIOMA VII.

82. *Si à majore & minore idem, vel aequalia ſubtrahas, reſiduum prius majus, poſterius minus eſt. Ita ſi* $7 > 3 + 2$, *erit* $7 - 2 > 3 + 2 - 2$

AXIOMA VIII.

83. *Si aequalia per aequalia multiplices facta ſunt aequalia. Ita ſi* $5 = 3 + 2$, *erit* $5 \cdot 4 = (3 + 2) 4$ (§. 60.)

AXIOMA IX.

84. *Si aequalia per aequalia dividas quoti ſunt aequales, Quia* $12 = 8 + 4$ *erit* $12:4 = (8+4):4$ (§. 63)

AXIOMA X.

85. *Totum eſt aequale omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis. Ita ſi 3 eſt totum, erit* $3 = 1 + 1 + 1$ (§ 8)

---

# CAPUT II.

## *De ſpeciebus Arithmeticæ in numeris integris.*

PROBLEMA II.

86. *Numeros quoscunque datos addere.*

RESOLUTIO.

I. Numeri homogenei ſub homogeneis ſcribantur, hoc eſt unitates ſub unitatibus, decades ſub decadibus centenarii ſub centenariis &c.

II. Sub iis ducatur linea recta, ne aggregatum cum aggregandis confundatur.

III. Sigillatim addantur unitates, & ſumma earum ipſis ſubſcribatur.

IV. Similiter decades addantur, & ſumma decadibus ſubſcribatur, centenari, & centenariis &c.

V. Hac operatione per reliquas numerorum datorum ſeries continuata, habebitur ſumma quæſita.e.g. Si numeri A, B, C, addendi, ita procedendum:

| | | |
|---|---|---|
| A | 3578 | 3 & 4 ſunt 7. additis 8 prodeunt 15. |
| B | 524 | collocentur 5 ſub unitatibus, & 1 decas |
| C | 63 | connumeretur decadibus datis. Itaqué |
| | 4165 | 1 ( ſcilicet *decas*) & 6 ( *decades* ) ſunt |

7 ( decades): additis 2 prodeunt 9. additis porro 7, habentur 16 ( decades ); collocentur 6 ſub decadibus datis, & reliquæ 10, hoc eſt unus centenarius annumeretur centenariis datis. Sunt itaqué 1 & 5 ( centenarii ) 6, & additis adhuc 5 prodeunt 11 ( centenarii ); collocetur 1 ſub centenariis datis, & 10 centenarii reliqui, hoc eſt unus millenarius addatur 3 ( millenariis ) datis, ſummaqué 4 ſub iis ſcribatur. Ita prodit ſumma quæſita 4165.

DEMONSTRATIO

Siquidem unitates, decades, centenarii, millenarii &c. numerorum datorum ſunt partes eorundem (§. 44.) idem ſunt cum omnibus numeris datis ſimul ſumptis. Sed ex operatione manifeſtum eſt, numerum inventum compoſitum eſſe ex omnibus unitatibus, decadibus, centenariis millenariis & numerorum datorum. Ergo numerus iſte eſt compoſitus ex omnibus numeris datis ſimul ſumptis, conſequenter ipſis æqualis, (§. 85.) adeoqué ſumma eorundem eſt. (§. 53.)

COROLLARIUM.

87. Quoniam ſeriei ſiniſteriori tot unitates adduntur, quod decades in ſerie dexteriore numerantur, additio faciliùs abſolvitur, ſi ex qualibet numerorum ſerie tot decades deleantur, quot in ea inveniuntur, reſiduum infra lineam ſcribatur, & numerus decadum abjectarum ſeriei proximæ ſiniſteriori addatur.

SCHOLION I

88. *Modus hic addendi eſt maximè naturalis* ( §. 43. ) *quó numeri heterogenei etiam adduntur. Ex ſerie nimirum ſpeciei minoris toties colligitur valor*

*lor speciei proximè majoris, quoties fieri potest, & pro uno quoquè unitas reponitur in serie proximè majore.* ex: gr: sint expensæ.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Junii* | 45. Flor: | 16. Groff: | 2. Solid: |
| *Julii* | 39 | 28 | 1 |
| *Augu* | 97 | 29 | 2 |
| *Erit summa.* | 183 | 14 | 2 |

*cum enim 3 solidi faciant grossum, additis 2 & 2 & 1 valor grossi semel invenitur, & remanent 2. scribuntur itaquè 2 infra lineam in loco solidorum, & 1 additur seriei grossorum. similiter siquidem 30 grossi faciunt unum florenum, in serie grossorum ut ante valor floreni bis colligitur, remanentibus 14, Quare denuo 14 in loco grossorum scribuntur, & duo florenis adnumerantur.*

SCHOLION II.

89. *Sunt qui examen additionis praecipiant, ut tam ex summa, quam ex summandis (considerando notas singulas instar digitorum) abiiciatur novenarius, & si residuum fuerit idem, bonam operationem colligunt. Sed cum examen tum fallere possit, quando error, novenarium vel ejus multiplum adaequat, per subtractionem, de qua mox examen instituendum.*

PROBLEMA III.

90. *Numerum minorem è majore subtrahere.*

RESOLUTIO.

I. Numerus minor majori subscribatur, ut homogenei homogeneis hoc est unitates unitatibus, decades decadibus &c. respondeant.

II. Sub numeris hisce ducatur linea recta.

III. subtrahantur sigillatim unitates ab unitatibus, decades à decadibus &c. & residua singula, loco conveniente, infra lineam scribantur.

IV. Quod si nota major è minore sit subtrahenda, ex sinisteriore loco in dexteriorem trasnferatur unitas,

tas, quæ hic (§. 44.) 10 valebit, ut ſubtractio fieri poſſit. Numerus verò unitate mulctatus punctô notetur, ne ipſum mulctatum obliviſcamur.

V. Si in loco ſiniſteriore cyphra occurrat, unitas à numero proximè ſequenti mutuetur. Unitas autem illa in locum dexteriorem tranſlata decas erit(§.44.) Quamobrem ubi plures cyphræ ſe ſe inſequuntur, omnes hac ratione in novenarios mutentur, & numerus minor, à quo ſubtractio fieri debet decade augeatur.

| | |
|---|---|
| e.g. Si ex | 98.0.0.4.034 |
| Subtrahas | 47386521 |
| Differentia eſt. | 50617513 |

Demptô enim 1 ex 4, relinquuntur 3 unitates infra lineam ſcribendæ & ablatis 2 ex 3 remanet 1 decas ſub decadibus ponenda. 5 à cyphra ſubtrahi non poſſunt à millenariis itaqué 4 auferatur unus & ejus locô decas cyphræ adiiciatur, eritqué 5 à 10 reſiduum 5 & ita porro.

DEMONSTRATIO.

Numerus inventus prodit, ſi unitates, decades, centenarios &c numeri minoris ex unitatibus, decadibus, centenariis &c. majoris numeri ſubducas *vi operationis*, hoc eſt ſi ſingulas partes numeri minoris à ſingulis partibus numeri majoris ſubtrahas; ſed ſingulæ partes numeri minoris ſimul ſumptæ ſunt numero minori æquales & ſingulæ partes numeri majoris ſimul ſumptæ ſunt numero majori æquales. (§.85.) Ergo idem relinqui debet numerus, ſi totum numerum minorem è toto majore ſubtrahas. (§.81.) Conſequenter cum totus ſubtrahendus ſit pars una, & totus reſiduus numerus ſit pars altera utpote complementum minuendi (§. 8.) erit reſiduus cum ſubtrahendo æqualis ipſi minuendo (§. 85.) adeoqué ſubtractio. (§. 56.) *Q. e. d.*

SCHO-

SCHOLION I.

91. *Si numeri heterogenei fuerint à se invicem subtrahendi; unitas mutuò accepta, non 10, sed tot unitates valet, quot unitates speciei minoris constituunt valorem unitatis speciei majoris.*

| Ex: gr: | 45. Flor: | 16 Grossi. | 1. Solid. |
|---|---|---|---|
| | 27 | 28 | 2. |
| | 17 | 17 | 2. |

SCHOLION II.

92. *Quodsi numerus major è minori subtrahi jubeatur, evidens est id fieri non posse. Subtrahitur itaqué minor è majore, & defectus notatur signo — Ex: gr: Si quis 8 Thaleros solvere debet, 3 tamen nonnisi habet, tribus solutis, 5 adhuc debet, ideoqué isti 5 per — 5 notantur.*

PROBLEMA IV.

93. *Examinare subtractionem.*

Residuo addatur subtrahendus. Quodsi enim summa æqualis fuerit minuendo, subtractio ritè peracta. (§56)

PROBLEMA V.

94. *Examinare additionem per subtractionem.*

RESOLUTIO.

I. Colligantur in unam summam singulæ series verticales, quibus constant numeri summandi initiô factô à sinistra, & progrediendo versùs dextram.

II. Summæ partiales subtrahantur à notis summæ, quæ singulis seriebus respondent. ( 90 )

Quod si in loco dextimo qui est unitatum relinquatur cyphra, additio ritè peracta. Sit exemplum additionis

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | 5 | 7 | 9 |
| | 8 | 4 | 6 | 2 |
| | 5 | 3 | 7 | 6 |
| 1 | 7 | 4 | 1 | 7 |
| | 1 | 2 | 1 | 0 |

Colle-

Collectæ in unam summam notæ in serie A 16 subducantur ex 17. & residuum 1 scribatur sub 7. similiter summa notarum in serie B 12 auferatur ex 14. &c.

DEMONSTRATIO

Ex operatione patet à millenariis summæ subtrahi omnes millenarios summandorum, & à centenariis, decadibus, unitatibus summæ, omnes centenarios decades, unitates summandorum. Quod si ergo operatione absoluta nihil relinquitur, summa tot omnino millenarios, centenarios, decades, unitates continet, quot numeri summandi simul sumpti continent; atque adeo summa numeris summandis simul sumptis æqualis est (77) consequenter additio ritè peracta (53) *Q. e. d.*

## PROBLEMA VI.

95. *Abacum Pythagoricum construere.*

RESOLUTIO

I. Latera quadrati alicujus singula in 9 partes æquales dividantur, & per lineas ipsi parallelas in areolas quadratas area ejus resolvatur.

II. In serie horizontali summa & laterali sinistima scribantur 9 notæ numericæ, seu singuli digiti.

III. Addantur 2 & 2; aggregatum 4 scribatur infra 2. addantur porro 2 & 4; aggregatum 6 sub 4. Addantur 2 & 6, aggregatum 8 ponatur sub 6 & ita porro.

IV. Si hæc additio per reliquos digitos continuetur, Abacus Pythagoricus construetur. *Q. e. f.*

ABACUS

ABACUS PYTHAGORICUS

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

SCHOLION.

96. *Abacum Pythagoricum mandare memoriae tenetur, multiplicationē ac diviſionem expedite abſoluturus.*

## PROBLEMA VII.

97. *Numerum datum per alium datum multiplicare.*

RESOLUTIO.

I. Multiplicator ſcribatur ſub multiplicando ut in additione (§. 85.)

II. Ducatur ſub iis linea recta.

III. Infra hanc ex *Abaco Pythagorico* ſcribantur ſingula producta ex ſingulis multiplicandi notis in unitates multiplicatoris ſimiliter ex illis in reliquas hujus notas ita; ut decades cujuſlibet producti annume-

numerentur producto proximè ſiniſteriori; & productum ex multiplicando in decades multiplicatoris in loco decadum, ſimiliter productum ex multiplicando in centenarios in loco centenariorum &c. ſcribere incipiamus.

IV. Producta partialia addantur: Aggregatum erit factum quæſitum.

Ex: gr: Sint factores 38476 & 35.

| | |
|---|---|
| 38475 | Multiplicatore ſub multiplicando ſcri- |
| 35 | ptô duc 5 in 6, cumqué factum vi |
| 192380 | Abaci Pythagorici ſit 30, ſcribe o |
| 115428 | ſub 5, & 3 decades annumera facto ex |
| 1346660 | 5 in 7 quod eſt 35. Additis itaqué 3 |
| | ad 35, prodeunt 38. pone 8 juxta o |

verſus ſiniſtram, & factô ex 5 in 4, nempe 20 adde 3, ut prodeant 23 ſcilicet centenarii & ita porro.

DEMONSTRATIO.

Vi operationis primus numerus intra lineas ſcriptus ſingulas multiplicandi notas, hoc eſt ſimgulas ejuſdem partes *adeoqué* (§. 44.) multiplicandum ipſum (§. 8.) toties continet, quoties prima multiplicatoris nota unitatem. Eodem modo patet, quod numerus ſecundus intra lineas ſcriptus multiplicandum toties contineant, quoties nota ſecunda multiplicantis unitatem &c. Sed cum numeri intra lineas ſcripti adduntur, ſumma iiſdem æqualis eſt, (§. 53.) adeoqué ſumma hæc multiplicandum toties continet, quoties ſingulæ multiplicatoris notæ, hoc eſt partes (§. 44.) hoc eſt totus multiplicator (§. 8. ) unitatem continet Eſt itaqué factum ex multiplicando in multiplicantem. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

98. *Si factoribus cyphrae adſint, producto invento eaedem adjunguntur; ut ex ſequentibus exemplis manifeſtum.*

3578

| | |
|---|---|
| 3578 | 4760 |
| 30 | 2000 |
| 107340 | 9520000 |

SCHOLION II.

99. *Quomodo absque Abaco Pythagorico sed per multipla multiplicatio & Divisio absolvatur, Item per Lamellas Neperianas, item per digitos erectos & depressos, in lectionibus pro multa scriptione paucis docebitur.*

PROBLEMA VIII.

100. *Numerum datum per alium minorem dividere.*

RESOLUTIO.

*Casus* I. Si divisor una nota fuerit.

I. Scribatur divisor à latere sinistro dividendi interposita lineola, tum ope abaci pythagorici inquiratur quoties in una vel duabus notis primis contineatur. Numerus, qui hoc indicat ponatur dextram versùs post lunulam locô quoti.

II. Quotus ducatur in divisorē, & productū, ex nota, vel notis illis primis subtrahatur, tū si quod fuerit residuū, sub linea scribatur, & nota proximè sequens eidē adjungatur.

III. Eodem quo prius modo denuo inquiratur, quoties divisor in nota vel notis residuis contineatur, quotus post lunulam scribatur, cum divisore multiplicetur, productum subtrahatur.

IV. Quodsi hæc operatio per singulas dividendi notas continuetur, quotus invenietur. *Q. e. f.*

Ex:gr. Sit dividendus 7856, divisor 3.

3(7856(2618 2/3
6
18
18
005
3
26
24

Ponantur 3 ad latus numeri dividendi interjecta linea; tum per abacum Pythagoricum innotescit 3 in 7 bis contineri: scribantur ergo 2 post lunulam loco quoti, & factum ex 2 in 3 hoc est 6 subtrahatur ex 7, residua unitas sub linea scribatur. Demittatur

jam

jam ſequens nota 8, & penes reſiduum collocetur ut ſint 18. cumquè per abacum Pythag: innoteſcat 3 in 18. ſexies contineri, ſcribantur 6 locô quoti & factum ex 3 in 6 ex 18 ſubtrahatur quo in caſu nihil relinquitur. Quod ſi eadem ratione ultra etiam procedatur, quotus tandem integer prodit 2618. & 2 remanent, id quod indicio eſt numerum datum in tres partes exactè dividi non poſſe.

D E M O N S L R A T I O.

Ex operatione manifeſtum numerum inventum indicare, quoties diviſor in millenariis, centenariis, decadibus, unitatibus dividendi, hoc eſt in ſingulis ejus partibus (§. 44.) adeoquè in toto dividendo (§. 85.) contineatur: conſequenter, unitatem toties continet, quoties dividendus diviſorem. Eſt igitur quotus. (§. 61.) *Q. e. d.*

*Caſus II.* Si diviſor ex pluribus notis conſtet.

I. Collocatô ut prius diviſore à latere dividendi, ope Abaci Pythagorici inquiratur quoties prima diviſoris nota in prima dividendi nota vel in duabus primis contineatur.

II. Numerus inventus ducatur in diviſorem integrum, & animadvertatur, utrum factum ex numeris ſupraſcriptis ſabtrahi poſſit, nec ne.

III. Si ſubtractio fieri poſſit, ſcribatur is locô quoti poſt lunulam, & ſubtractio actu peragatur. Et qui reſidui fuerint, demittantur infra. Quodſi verò ſubtractio non ſuccedat, locò quoti ſumatur numerus unitate vel aliquot unitatibus minor, donec factum ex eo in diviſorem notis dividendi par quam proximè fuerit ut ex iis auferri poſſit.

IV. Reliqua fiant ut ante. *Ex: gr: Sit dividendus 7856, diviſor 32*

```
32 ) 7856 (245 16/32
     64
     ---
     145
     128
     ---
      176
      160
      ---
       16
```

*Scribatur divisor à latere dividendi tum per Abacum Pythagoricum quaeratur, quoties 3 in 7 contineantur, cum itaquè bis contineantur, ducantur 2 in 32, & quia factum 64 subtrahi potest ex 78 scribantur post lunulam 2 &c.*

DEMONSTRATIO

Eadem ferme est quæ in *Casu I.* unum hic addendum præterea, suppositionem istam, quâ notam 1mam divisoris in dividendi 1ma nota inquirimus nos non posse in errorem inducere: Examen enim mox instituitur, cum factum ex divisore in quotum cum dividendo comparatur, & pseudoquotus unitate tamdiu minuitur, donec in verum abeat.

SCHOLION

101. *Sicut in multiplicatione ( §. 98. ) ita in divisione compendio uti licet si divisor ex una vel pluribus cyphris componatur: quia enimvero non dantur multipla nihili, sive cyphrarum, tot notae in dividendo resecantur ad finem, quot sunt cyphrae in divisore residuum verò solito modo dividitur* Ex: gr:

```
4000 ( 684 )563 { 171 563/4000
        4    000
       ---
        28
        28
       ---
         4
         4
```

PROBLEMA IX.

102 *Examinare multiplicationem.*

RESOLUTIO.

Dividatur factum per multiplicandum, quotus erit multi-

multiplicans, aut factum dividatur per multiplicantem, quotus erit multiplicandus. ( §. 58. )

### PROBLEMA X.

103. *Examinare divisionem.*

I. Quotus ducatur in divisorem, aut divisor in quotum.

II. Facto addatur residuum à divisione si fuerit. Quod si hac ratione prodeat dividendus, divisio legitimè facta. ( §. 61. )

### SCHOLION I.

104. *Generale illud Scholion §. 125. Arithm: Volfii clarissimi brevitatis causâ hic equidem intermittimus, non tamen in praelectionibus de eo tanquam momenti maximi tacere fas erit.*

### SCHOLION. II.

105. *Prima danda est opera ut caput quod sequitur probè intelligatur, amplissimi non per Mathesim tantum universam sed per Philosophiam caeterasqué scientias usus.*

---

# CAPUT III.

## *De ratione ac proportione quantitatum.*

### DEFINITIO. XXXIX.

106. *Ratio* est ea homogeneorum quò ad excessum defectum, vel æqualitatem relatio-quâ quantitas unius determinatur, ex quantitate alterius sine tertio assumpto. Homogenea, quæ comparantur, dicuntur *Termini rationis*, & in specie *Antecedens* vocatur, qui ad alterum refertur, *Consequens* verò ad quem alter refertur.

SCHOLION.

107. *Definitur ita in genere ratio, ut doctrina iſtiuſmodi etiam ad incommenſurabilia, hoc eſt ad quodvis quantitatum genus ſe extendat.*

COROLLARIUM I.

108. Cùm in fractionibus relatio numeratoris ad denominationem ſine tertio homogeneo aſſumpto intelligatur, ( §. 51. ) erit ea ratio.

COROLLARIUM II.

109. Si duæ quantitates inter ſe comparantur ſine tertia homogenea aſſumpta aut una alteri æqualis, aut inæqualis deprehenditur. Ratio itaqué vel æqualitatis, vel inæqualitatis.

COROLLARIUM I.

110. Si termini rationis fuerint inæquales, vel minor refertur ad majorem ( §. 19. ) vel major ad minorem, minor nempe ad majorem tanquam pars ad totum, major verò ad minorem tanquam totum ad partem ( §. 18. ) Ratio itaqué determinat quoties minus in majore continetur, vel quoties majus minus continet, hoc eſt quantæ majoris parti minus æquetur, id quod diviſio prodit. ( §. 61.

DEFINITIO XL.

111. *Ratio majoris inæqualitatis* eſt, quam habet majus ad minus e:g: 6. ad 3. *Ratio minoris inæqualitatis*,quam habet minus ad majus e.g. 3 ad 6.

DEFINITIO XLI.

112. *Ratio rationalis* dicitur,quæ eſt ut unitas vel numerus rationalis ad numerum rationalem e.g. ut 3 ad 4.

*Irrationalis* vocatur, quæ numeris rationalibus

libus exprimi non poteſt. (§. 38.)

SCHOLION

113. *Sint duae quantitates A & B, ſitque A < B. ſi A ex B toties ſubtrahas, quoties fieri potuerit, e.g. quinquies relinquetur vel nihil vel aliquid. In priori ergo caſu erit A ad B ut 1 ad 5, hoc eſt A in B quinquies continetur, ſeu* $A = \frac{1}{5} B$. *Ratio ergo eſt rationalis. Quodſi aliquid poſt ſubtractionem relinquetur, aut dabitur pars aliqua, quae aliquoties ex A, e.g. ter itidemque ex B e.g. ſepties ſubducta nihil relinquit; aut nulla dabitur iſtiuſmodi pars. ſi prius: erit A ad B, ut 3 ad 7 ſeu* $A = \frac{3}{7} B$, *adeoque ratio denuo rationalis. Si poſterius; ratio ipſius A ad B numeris exprimi non poteſt rationalibus, hoc eſt, dici nequit, quanta pars ipſius B ſit A. Suo autem loco oſtendetur, quomodo pars illa aliquota communis inveniri poſſit, nec minus demonſtrabitur dari quantitates, quae rationem irrationalem habent. Hinc ſimul lumen affunditur Definitioni Rationis, dum oſtendimus, quomodo ex comparatione duorum homogeneorum, ſine tertio homogeneo aſſumpto ratio intelligi poſſit.*

DEFINITIO XLII.

114. *Exponentem rationis* dico quotum, qui ex diviſione antecedentis per conſequentem emergit. e.g. rationis 3 ad 2 exponens eſt $1\frac{1}{2}$; ſed rationis 2 ad 3 eſt $\frac{2}{3}$: vocatur is etiam *Denominator* nec non *Nomen rationis*.

SCHOLION.

115. *In Geometria demonſtrabitur quod exponens ratio-*

*rationis datae exprimi posit linea quamvis in numeris vel rationalibus vel irrationalibus exprimi non possit.*

COROLLARIUM I.

116. Si consequens est unitas, ipse antecedens est exponens rationis: e.g. Rationis 4 ad 1 exponens est 4.

COROLLARIUM II.

117. Numerus ergo quilibet integer exprimit rationem multi ad unum, seu multitudinis ad unitatem.

COROLLARIUM III.

118. Exponens rationis est ad unitatem, ut antecedens ad consequentem (§. 61.)

COROLLARIUM IV.

119. Rationes per exponentes discernuntur (§. 114.) atque adeo si antecedens A, consequens B, ratio ipsius A ad B commodè exprimetur per A : B. (§. 63)

DEFINITIO XLIII.

120. Si terminus minor est majoris pars aliquota, *Ratio* majoris inæqualitatis vocatur *multiplex*. *Ratio* verò minoris inæqualitatis *Submultiplex*. Speciatim in casu 1mo *dupla*, si exponens 2, *tripla*, si exponens 3, &c. in altero *Subdupla*, si exponens $\frac{1}{2}$; *subtripla*, si exponens $\frac{1}{3}$ &c. e.g. 6 : 2 habet rationem triplam, 2 ad 6 est in ratione subtripla.

DEFINITIO XLV.

121. Si terminus major minorem semel continet ac insuper partem ipsius aliquotam; *Ratio* majoris inæqualitatis vocatur *Superparticularis*. *Ratio* minoris æqualitatis *Subsuper-*

*ſuperparticularis*. Speciatim in caſu 1mo vocatur *ſeſquialtera*, ſi exponens $1\frac{1}{2}$; ſeſquitertia, ſi exponens $1\frac{1}{3}$ &c. in altero *ſubſeſquialtera*, ſi exponens $\frac{2}{3}$; *ſubſeſquitertia* ſi exponens $\frac{3}{4}$ &c. e.g. 4 ad 3 eſt in ratione ſeſquitertia; 3 ad 4 in ſubſeſquitertia.

DEFINITIO XLV.

122. Si terminus major minorem ſemel continet, ac inſuper partes ipſius aliquot aliquotas; *Ratio* majoris inæqualitatis vocatur *Superpartiens*. *Ratio* minoris inæqualitatis *Subſuperpartiens*. Speciatim in caſu priore dicitur *Superbipartiens tertias*, ſi exponens $1\frac{2}{3}$, *Supertripartiens quartas* ſi $1\frac{2}{3}$ &c. In poſteriore ſubſuperbipartiens tertias, ſi exponens $\frac{3}{5}$, *Subſuperbipartiens quartas*, ſi exponens $\frac{4}{7}$ e.g. 5 : ad 3. eſt ratio ſuperbipartiens tertias, ſed 3 ad 5 ratio ſubſuperbipartiens tertias.

DEFINITIO XLVI.

123. Si terminus major minorem aliquoties continet, & inſuper partem ipſius aliquotam. *Ratio* majoris inæqualitatis vocatur *multiplex ſuperparticularis*. *Ratio* minoris inæqua-

æqualitatis *ſubmultiplex ſubſuperparticularis*: ſpeciatim in caſu primo *dicitur dupla ſeſquialtera*, ſi exponens $2\frac{1}{2}$ *tripla ſeſquiquarta*, ſi exponens $3\frac{1}{4}$ &c. & in altero *ſubdupla ſubſeſquialtera* ſi exponens $\frac{2}{5}$ *ſubtripla ſubſeſquiquarta* ſi $\frac{4}{13}$.

DEFINITIO XLVII.

124. Denique ſi terminus major minorem aliquoties continet, ac inſuper aliquot partes ipſius aliquotas, *Ratio* majoris inæqualitatis dicitur *multiplex ſuperpartiens*. *Ratio* minoris inæqualitatis *ſubmultiplex ſubſuperpartiens* Speciatim in caſu primo vocatur dupla ſuperbipartiens tertias, ſi exponens $2\frac{2}{3}$; *tripla ſuperquadripartiens ſeptimas*, ſi exponens $3\frac{4}{7}$ &c. in altero *ſubdupla, ſubſuperbipartiens tertias*, ſi exponens $\frac{3}{8}$ &c. e.g. ratio 25 ad 7 eſt tripla ſuperquadripartiens ſeptimas; 3 ad 8 ſubdupla ſuperquadripartiens tertias.

SCHOLION.

125. *Haec ſunt genera & ſpecies rationum rationalium, quarum quidem nomina apud Recentiores rarius occurrunt eorum enim loco rationum terminis minimis utuntur, e.g. pro dupla* 2 : 1, *pro ſeſquialtera* 3 : 2, *non tamen ab eo ignorari poſſunt, qui ſcripta Mathematicorum evolvit. Adnotavit inſignis ſuo aevo Mathematicus Noſter* R. P. Clavius *exponen-*

*tes*

*tes, rationis majoris inaequalitatis* & re, & nomine *rationes autem minoris inaequalitatis*, re tantum non nomine *denominare. Facilè verò in his nomen rationis dictae invenies, si denominaorē exponentis dividas per numeratorem. e.g. Si Exponens fuerit* 5 *erit* $8:3 = 1\frac{3}{5}$ *, unde innotescit rationem vocari subsupertripartientem quintas* (*§*. 122.)

DEFINITIO XLVIII.

126. *Rationes eædem* ſunt, quarum antecedentes ad ſuos conſequentes eodem modo referuntur, ſeu quarum antecedentes per ſuos conſequentes diviſi dant exponentes æquales.

SCHOLION I.

127. *Servit Definitio rationibus etiam irrationalium.* (*§*. 115.)

COROLLARIUM I.

128. Quoties ergo antecedens unius rationis ſuum conſequentem, vel quantam conſequentis partem continet, toties antecedens alterius ſuum conſequentem, vel tantam conſequentis partem continet. (§. 110.)

COROLLARIUM II.

129. Si fuerit A ad B ut C ad D; erit $A : B = C : D$ ſeu in exemplo ſingulari $8 : 4 = 6 : 3$ & hoc modo identitatem rationum in poſterum deſignabimus. (§. 119.)

SCHOLION. II.

130 *Alii ſignis aliis utuntur. Communiter A.B: : C. D. ſcribere ſolent, ſed 2dum leges artis characteriſticae ſigna ſcientifica non ſcientificis praeferri debent. Sunt autem ſigna ſcientifica, ſeu ad inveniendum apta, quae per characteres derivativos exprimunt ea, quorum notiones ex aliis ſimplicioribus componuntur.*

COROL-

COROLLARIUM III.

131. Cùm rationes non diſcernantur, niſi per exponentes (§. 119) in rationibus autem iiſdem exponentes iidem ſunt (§. 126.), rationes eædem ſunt etiam ſimiles (21.) & è contra.

DEFINITIO XLIX.

132. Rationum duarum *identitas* vel *ſimilitudo* dicitur proportio. Et hinc quantitates eandem rationem habentes dicuntur *proportionales*. e.g. Si A : B = C : D. dicuntur A, B, C, & D ſeu 8,4,6,& 3 proportionales.

DEFINITIO L.

133. *Proportio continua eſt*, ſi conſequens 1mæ rationis idem eſt cum antecedente ſecundæ rationis. Ex.gr. 3 : 6 = 6 : 12. *Diſcreta proportio eſt*, ſi conſequens primæ diverſus ab antecedente ſecundæ, e.g. 3 : 6 = 4 : 8. In Proportione continua *Terminus* qui pro antecedente primæ & pro conſequente ſecundæ rationis ponitur, *medius proportionalis* appellatur. Ita numerus 6 eſt medius proportionalis inter 3, & 12.

DEFINITIO LI.

134. Rationum diverſarum A : B, & F : G *major* dicitur A:B ſi fuerit A:B > F:G contra *minor* F : G, ſi F : G < A : B. unde & rationem minorem ac majorem hoc modo deſignabimus.

DEFINI-

DEFINITIO LII.

135. *Ratio* ex duabus vel pluribus aliis *composita* dicitur, quam habet factum ex duarum vel plurium rationum antecedentibus, ad factum ex earundem consequentibus, Ita 6 ad 96 est in ratione composita 2 ad 8, & 3 ad 12. In Specie *duplicata* vocatur, quæ ex *duabus*, *triplicata* quæ ex 3bus, *quadruplicata* quæ ex 4 &c. & in genere *multiplicata*, quæ ex pluribus rationibus similibus componitur. Ita 48: 3 est ratio duplicata ipsarum 4 : 1, & 12: 3. Item 16 : 1. est ipsarum 4 : 1, & 4 : 1. Hinc etiam intelligitur, quænam ratio dicenda sit *subduplicata*, *subtriplicata*, *subquadruplicata* & in genere *submultiplicata*. Scilicet 4 : 1 est ratio subduplicata ipsius 16 : 1. Item 4 : 1 est ipsius 48 : 3. Et etiam 12 : 3 est ratio subduplicata ipsius 48 : 3.

THEOREMA II.

136. *Quae sunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem commensurabilia sunt.*

DEMONSTRATIO.

Numeri rationalis integri pars aliquota est unitas ( §. 35. ), fractus verò cum unitate partem aliquotam communem habet ( §. 36. ); Quæ igitur ut numerus rationalis ad numerum rationalem, eorum unum vel est pars aliquota alterius, vel utriusque pars aliquota communis datur. Quare commensurabilia sunt. ( §. 26. ) *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

137. Cùm in divisione sit ut divisor ad dividendum,

dum, ita unitas ad quotum ( §. 61. ), ſi numerus rationalis per rationalem dividitur, unitas eſt ad quotum, ut numerus rationalis ad numerum rationalem, ideoqué quotus commenſurabilis unitati ( §. 136. ) adeoqué numerus rationalis.

COROLLARIUM II.

138. Quoniam ergo in ratione rationali exponens rationis prodit, numerô rationali per rationalem divisô ( §. 112. 114. ) rationis rationalis exponens eſt numerus rationalis ( §. 136. )

THEOREMA III.

139. *Commenſurabilia ſunt inter ſe, vel ut unitas ad numerum rationalem integrum, vel ut numerus rationalis integer ad alium rationalem integrum: incommenſurabilia non item.*

DEMONSTRATIO

Commenſurabilinm aut unum eſt pars aliquota alterius, aut utriuſqué datur pars aliquota communis ( §. 26. ) Quodſi adeo in caſu priore quantitas minor in poſteriore pars aliquota communis pro unitate aſſumatur; reſpondebit in caſu priore quantitati majori, in poſteriore utriqué numerus rationalis integer ( §. 35. ) Ergo in caſu priore quantitates ſunt inter ſe ut unitas, in poſteriore ut numerus rationalis integer ad numerum rationalem integrum. *Q. e.pr.*

Incommenſurabilium nulla datur pars aliquota communis ( §. 26. ) Nulla ergo datur unitas, cui commenſurabilia exiſtant. Quare cùm omnis numerus rationalis unitati commenſurabilis ſit ( §. 34. ) Incommenſurabilia non ſunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem. *Q. erat alterum.*

COROLLARIUM I.

140. Commenſurabilium ratio eſt rationalis, incommenſurabilium irrationalis ( §. 112. ) adeoqué & exponens illorum rationalis, horum autem irrationalis

eſt nu-

est numerus. (§. 137.) *Dari autem quantitates incommensurabiles in Geometria demonstrabitur.*

THEOREMA IV.

141. *Rationes A:B & C:D similes eidem tertiae F:G. sunt etiam similes inter se. Item similibus similes sunt inter se similes.*

DEMONSTRATIO

6 : 3 = 8 : 4 ( Rationes similes eidem 3tiæ
10 : 5 = 8 : 4 ( sunt etiam eædem eidem 3tiæ

6 : 3 = 10 : 5 (§.131.) Quare cum sit A : B = F : G. & C : D = F : G. erit A:B = C:D (§.77.) *Quod erat unum.*

Item A : B = C : D, & F : G = H : E & C : D = H : E *per hypoth*: sed A : B = H : E *per demonstrata*. Ergo etiam A : B = F : G per *Demonstr: Quod erat alterum.*

THEOREMA V.

142. Idem *C ad aequalia A & B, & aequalia A & B ad idem C, vel etiam ad aequalia C & D eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

143. A = B *per hypoth*: Ergo C : A = C : B. (§.84) consequenter C ad A & B eandem rationem habet. (§.129.) *Q. erat primum.*

Similiter quia A = B *per hypoth*: erit A : C = B : C (§.84.) consequenter A ad B, & C eandem rationem habent. (§. 129.) *Quod erat alterum.*

Sit denique A = C, & B = D Erit A : B = C : D (§.84.) & ratio eadem (§.129.) *Quod erat 3tium.*

THEOREMA VI.

144. Si fuerit A : B = C : D erit etiam invertendo B : A = D : C.

DEMONSTRATIO.

Sit exponens ipsius A : B = E, & ipsius C : D = G. erit per *hypoth*: G = E. Sed B : A = 1 : G &

D

D:C = 1:E (§. 61.) Ergo B:A = D:C (§. 141.) *Q. e. d.*

THEOREMA VII.

145. *Partes similes P & p eandem rationem habent ad tota T & t: si tota ad partes eandem rationem habent, partes sunt similes: & tota ad partes similes eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Habeat enim si fieri poteſt P ad T aliam rationem quam p ad t; partes p & P per diverſitatem rationis ad tota à ſe invicem diſcerni poterunt. Sed hoc eſt abſurdum utpote contra, hypotheſim Eo. P:T = p:t. *Quod erat unum.*

Si t : p = T : P erit p : t = P : T (§. 144.) Ergo *per demonſtrata* P & p, ſunt partes ſimiles *Quod erat alterum.*

Si p & P ſunt partes ſimiles totorum T & t, erit P:t = p:t (*per num.* 1.) adeoqué T:P = p:t (§. 144.) hoc eſt tota ad partes ſimiles eandem rationem habent.

THEOREMA VIII.

146. *Partes ſimiles P & p ſunt inter ſe ut tota. T & t.*

DEMONSTRATIO.

Totum eſt idem cum partibus ſuis ſimul ſumptis. (§. 8.) Ergo quoties ſumitur totum, toties etiam ſumitur pars ejus quantalibet e. g. quarta, 6ta, vigeſima &c.

Sed ſi ſumatur totum minus t toties, donec toti majori T æquale fiat, ſumetur etiam pars minor p toties, donec parti majori P ſimili æqualis fiat; toties itaqué P continebit p, quoties T ipſum t. ſunt ergo partes ſimiles ut tota. (§. 131.) *Q.e.d.*

SCHOLION.

147. *Notandum eſt, numerum qui indicat quoties ſumatur*

*ſumatur totum minus, ut majori aequale fiat, non ſemper eſſe rationalem, ſed irrationalem quoqué eſſe poſſe: quo in caſu tota ad ſe invicem rationem irrationalem habent. e.g. In Geometria demonſtrabimus latus quadrati ut diagonali aequale fiat, toties ſumi debet, quoties unitas continetur in radice ex duobus. Quodſi latus quadrati dividatur in 2 partes, quarum una eſt pars quarta totius, altera tres quartas continet; tum quoties unitas continetur in radice ex binario, toties etiam ſumi debet pars quarta lateris quadrati, ut parti quartae diagonalis aequalis fiat.*

THEOREMA IX.

148. *Si A: B = C: D; erit etiam alternando ſeu permutando A: C = B: D.*

DEMONSTRATIO.

I. Si Antecedentes A & C minores fuerint conſequentibus B, & D, eorum partes. ( §. 18. ) æqué ſimiles ſunt. ( §. 145. ) Sunt itaqué ut tota; hoc eſt A: C = B: D. (§. 146.)

II. Si Antecedentes A & C majores ſint conſequentibus B & D, tum quia A: B = C: D *per hyp:* erit B: A = D: C; ( §. 144. ) conſequenter B: D = A: C. per caſum I. *Q.e.d.*

COROLLARIUM I.

149. Ergo in diviſione unitas ad diviſorem ut quotus ad dividendum. ( §. 61. )

COROLLARIUM II.

150. Si fuerit A: B = C: D & B = D. erit etiam A = C. Eſt enim A: C = B: D (§. 148. ) ſed B = D, Eo etiam A = C.

COROLLARIUM III.

151. Si fuerit B: A = D: C & B = D erit etiam A = C. cum enim ſit A: B = C: D ( §. 144.) erit etiam A = C (§. 140.)

THEO-

## THEOREMA X.

152. *Quae ad idem vel aequalia eandem habent rationem aequalia sunt; & ad quae idem vel aequalia eandem habent rationem ea itidem aequalia sunt.*

DMONSTRATIO.

A:B = D:B. *per hyp:* Ergo A:D = B:B. (§. 148.) sed B = B, Quare A = D. (§. 126.) sit A:B = D:C; & B = C, Ergo A:D = B:C (§. 148.) sed *per hypoth:* B = C; Quare A = D (§. 126.) *Q. erat unum.*

Similiter C:A = C:B *per hypoth:* Ergo C:C = A:B. (§. 148.) sed C = C Quare A = B (§. 126.) sit C:A = D:B & C = D Ergo C:D = A:B. (§. 148.) sed *per hypoth:* C = D Quare A = B (§. 126.) *Quod erat alterum.*

## THEOREMA XI.

153. *Si quantitates quascunque A & B per eandem tertiam C multiplices facta D & E, sunt inter se ut A & B.*

DEMONSTRATIO.

| A. | B. | 1 : C = A : D. |
|---|---|---|
| 2. | 4. | |
| C 3. | 3 | 1 : C = B : E. (§. 58.) |
| D 6 | 12.E. | Ergo A : D = B : E (§. 141.) |
| 2 : 4 = 6 : 12 | | Quare A : B = D : E (§. 148.) |

*Q. e. d.*

COROLLARIUM.

154. Ergo si A > B etiam AC > BC (§. 126.) hoc est; si *majus & minus per idem vel aequalia multiplices, factum prius est majus altero.*

## THEOREMA XII.

156. *Si quantitates quascunque A & B per eandem tertiam C dividas, quoti F & G sunt inter se ut A & B.*

DEMON-

DEMONSTRATIO.

24 : 12 — 1 : C = F : A
3 ——— 8 : 4 — 1 : C = G : B. ( §. 149. ) Ergo
8 : 4 = 24 : 12 (F : A = G : B. ( §. 141. ) consequenter F : G = A : B. (§. 138.) *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

156. Si A > B, etiam F > G, hoc est, *si majus & minus per idem vel aequalia dividas quotus prior posteriore major est*

THEOREMA XIII.

157. *Si rationum similium A : B, & C : D tam antecedens quam consequens unius rationis A : B multiplicetur, vel dividatur per idem E, in priori casu facta F & G, in posteriori quoti H & I cum C & D eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam F & G sunt facta ipsarum A & E item B & E *per hypoth:* erit A : B = F : G ( §. 153. ); sed etiam A : B = C : D *per hypoth:* Ergo F : G = C : D ( §. 141. ) *Q.e.primum.*

Simili modo siquidem H & I sunt quoti ex divisione ipsarum A & B per idem E *per hypoth:* erit A : B = H : I ( §. 155. ) consequenter cum sit etiam A : B = C : D *per hypoth:* erit H : I = C : D ( §. 141. ) *Q.e.alterum.*

THEOREMA XIV.

158. *Si rationum similium A : B & C : D antecedentes vel consequentes per idem E dividas, in casu priore quoti F & G ad consequentes B & D; in posteriori Antecedentes A & C ad quotos H & K eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

3 : 6 = 12 : 24.
3 — 3
1 : 6 = 4 : 24.

Quoniam A : B = C : D *per hypoth:* erit A : C = B : D ( §. 148. ) sed A : E = F,

& C : E = G *per hypoth:* Ergo F : G = A : C (§. 155. ) = B : D ( §. 141. ) consequenter F : B = G : D ( §. 148. ) *Quod erat unum.*

Similiter quoniam A : B = C : D *per hypoth:* erit A : C = B : D. (§.148.) sed B : E = H & D : E = K *per hypoth:* Ergo B : D = H : K (§.155.) consequenter A : C = H : K ( §. 141. ) & hinc tandem *A : H = C : K* (§. 148.) *Quod erat alterum.*

## THEOREMA XV.

159. *Si rationum similium A : B & C : D antecedentes vel consequentes per eandem quantitatem E multiplices in casu priore facta AE, & CE ad consequentes B & D; in posteriore Antecedentes A & C ad facta BE & DE eandem rationem habent.*

### DEMONSTRATIO

2 : 6 = 3 : 9 Quia A : B = C : D *per hypoth:* A : C = B : D(§.148.)
4 4
8 : 6 = 12 : 9 ( sed EA : EC = A : C ( §. 153. ) Ergo EA : EC = B : D ( §. 141. ) consequenter EA : B = EC : D (§. 148. ) *Q. e. unum.*

Eodem modo quia A : B = C : D *per hypoth:* A : C = B : D (§.148.) sed B : D = BE : DE (§.153.) Ergo A : C = BE : DE ( §. 141. ) consequenter A : BE = C : DE (§.148.) *Quod erat alterum.*

## THEOREMA XVI.

160. *Si rationum similium A : B & C : D Antecedentes per idem E, & consequentes per idem F multiplices, aut dividas, in casu priore facta in posteriore quoti eandem inter se rationem habent.*

### DEMONSTRATIO.

3 : 6 = 12 : 24 A : B = C : D *per hypoth:*
2 3 2 3 Ergo EA : B = EC : D.
6 : 18 = 24 : 72 ( §. 159. ) consequenter EA : FB = EC : FD. ( §. *cit:*) *Quod erat unum*

3 :6

$$\frac{3 : 6 = 12 : 24}{\frac{3 \cdot 2 \quad 3 \cdot 2}{1 : 3 = 4 : 12}}$$

Sit A : E = G, B : F = H. C : E = K & D : F = L. Quoniam A : B = C : D *per hypoth:* erit G : B = K : D ( §. 158. ) Ergo & G : H = K : L. ( §. *cit:* ) *Quod erat alterum.*

THEOREMA XVII.

161. *In ratione majoris inaequalitatis pars antecedentis ad consequentem eandem rationem habet, quam antecedens integer ad consequentem suum.*

*In ratione verò minoris inaequalitatis majus quodpiam antecedente ad consequentem eandem rationem habet, quam antecedens majoris rationis ad suum consequentem.*

DEMONSTRATIO.

Si A ad B rationem majorem habet quam C ad D, erit A : B > C : D ( §. 134. ) ut igitur sit æqualis prior ratio alteri, necesse est, ut minùs quam A, hoc est pars ipsius ( §. 18. ) per B dividatur ( §. 156. ) quæ pars si dicatur F, erit F : B = C : D. id est in ratione majoris inæqualitatis pars antecedentis ad consequentem eandem rationem habet, quam minoris Antecedens ad suum. ( §. 129. ) *Quod erat unum.*

Similiter si A : B minorem habet rationem quam C ad D; erit A : B < C : D. ( §. 139. ) ut igitur ratio prior alteri sit æqualis, necesse est, ut majus quam A cujus pars est A ( §. 18. ) per B dividatur. ( §. 156. ) quod si ea dicatur F, erit F : B = C : D hoc est in Ratione minoris inæqualitatis majus antecedente rationem eandem habet ad consequentem, quam antecedens majoris rationis ad suum consequentem. ( §. 129. ) *Quod erat alterum.*

THEOREMA XVIII.

162. *Si fuerint quotcunque rationes similes A : B, C : D, E : F &c. Summa omnium antecedentium*

*A + C + E &c. est ad summam omnium consequentium B + D + F &c. ut antecedens unius rationis A ad suum consequentem B.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus e.g. esse $A = \frac{1}{2} B$, $C = \frac{1}{2} D$, $E = \frac{1}{2} F$ erit $A + C + E = \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} D + \frac{1}{2} F$. (§. 78.) hoc est summa omnium antecedentium est subdupla summæ omnium consequentium. Sed *per hypoth:* quilibet antecedens subduplus sui consequentis, consequenter summa omnium antecedentium ad summam consequentium ut antecedens unius rationis ad suum consequentem (§. 126.) Eodem modô cum argumentatio procedat, si alia quæcunqué ratio antecedentium ad consequentes ponatur, patet propositum. *Q.e.d.*

THEOREMA XIX.

163. *Si fuerit ut totum A + C ad totum B + D ita ablatum C ad ablatum D; erit etiam reliquum A ad reliquum B, ut totum A + C ad totum B + D, vel ut ablatum C ad ablatum D.*

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{rcl} 24 & : & 12 \\ 6 & : & 3 \\ \hline 18 & : & 9 \end{array}$$

Aut $A : B = C : D$, aut $A : B > C : D$, aut deniqué $A : B < C : D$. Ergo pars ipsius A, quæ dicatur F erit ad B, ut C ad D (§.161.) hoc est $F : B = C : D$. (§.129.) consequenter $F + C : B + D = C : D$ (§.162.) quare cum etiam sit $A + C : B + D = C : D$ *per hypoth:* erit $F + C : B + D = A + C : B + D$ (§.141.) & hinc $F + C = A + C$ (§.152.) adeoqué $F = A$ (§.81.) sed F est pars ipsius A per *demonstrata*. Pars igitur toti æqualis, quod cum sit absurdum (§.85.) ut sit $A : B > C : D$ fieri non potest.

Sit jam $A : B < C : D$ Ergo majus ipso A, quod dicatur G, ad B eandem rationem habet, quam C ad D (§. 161.) hoc est $G : B = C : D$ (§. 129.) consequenter $G + C : B + D = C : D$, (§. 162.) Quare cum

re cum

re cum etiam ſit $A + C : B + D = C : D$ *per hypoth:* erit $G + C : B + D = A + C : B + D$ (§. 141.) & hinc $G + C = A + C$ (152.) adeoqué $G = A$ (§. 81.) ſed A eſt pars ipſius G *per demonſtrata* Ergo pars toti æqualis: quod cum ſit abſurdum (85.) $A : B < C : D$ eſſe non poteſt.

Quoniam itaqué nequé $A : B > C : D$ nequé $A : B < C : D$ *per demonſtrata:* erit utiqué $A : B = C : D$ conſequenter $A : B = A + C : B + D$ (§.162.) *Q. e. d.*

## THEOREMA XX.

164. *Si fuerit $A : B = C : D$ erit $A - C : B - D = A : B$ vel $C : D$. hoc eſt differentia antecedentium eſt ad differentiam conſequentium, ut antecedens rationis utriuſqué ad ſuum conſequentem.*

### DEMONSTRATIO

Quoniam $A : B = C : D$ *per hypoth:* erit $A : C = B : D$ (§. 148.) Ponamus $A > C$ & $B > D$ erunt A & B tota; C & D eorum partes. (§.8. 18.) Quare cum ſit $A : B = C : D$ *per hypoth:* erit $A - C : B - D = A : B$ vel $= C : D$ (§.160.) *ſcilicet totum eſt ad totum ut reliquum ad reliquum; quia totum eſt ad totum ut ablatum ad ablatum.*

## THEOREMA XXI.

165. *Si fuerit $A : B = C : D$ erit* componendo
$A + B : B = C + D : D$ vel
$A + B : A = C + D : C$. *hoc eſt ut ſumma antecedentis & conſequentis primae rationis, ad antecedentem vel conſequentem primae, ita ſumma antecedentis & conſequentis 2dae rationis ad antecedentem vel conſequentem ſecundae.*

### DEMONSTRATIO.

$4 : 2 = 10 : 5$
$6 : 2 = 15 : 5$
vel $6 : 4 = 15 : 10$

Si $A : B = C : D$ *per hyp:*
erit $A : C = B : D$ (§. 148.)
ſed $A + B : C + D = B : D$

$= A : C$ (§. 162.) Ergo $A + B : B = C + D : D$ Item $A + B : A = C + D : C$ (§. 148.) *Q.e.d.*

THEOREMA XXII.

166 *Si fuerit* $A : B = a : b$ & $A : C = a : c$ &c. *erit* $A : A + B + C = a : a + b + c$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $A : B = a : b$ & $A : C = a : c$ *per hyp:* erit $A : a = B : b = C : c$ (§. 148. 141.) Quare $A : a = A + B + C : a + b + c$. (§. 162.) & hinc $A : A + B + C = a : a + b + c$. (§. 148.) *Q.e.d.*

THEOREMA XXIII.

167. *Si fuerint* $A : B = C : D$, $E : F = G : H$ $I : K = L : M$ &c. *Erit* $A + E + I : B + F + K = C + G + L : D + H + M$. *hoc est summa omnium antecedentium primarum rationum est ad summam suorum consequentium, ut summa omnium antecedentium secundarum rationum ad summam consequentium suorum.*

DEMONSTRATIO.

Cum $A : B$, $E : F$, $I : K$, &c. Itemqué $C : D$, $G : H$, $L : M$, &c. sint rationes similes *per hypoth:* erit $A + E + I : B + F + K = A : B$ & $C + G + L : D + H + M = C : D$. (§. 162.) est verò $A : B = C : D$ *per hyp:* itaqué erit $C + G + L : D + H + M = A : B$. (§. 141.) Ergo $A + E + I : B + F + K = C + G + L : D + H + M$. (§. *cit:*) *Q. e. d.*

THEOREMA XXIV.

168. *Si fuerit :* $A : B = C : D$ erit dividendo $A - B : B = C - D : D$. Item convertendo $A - B : A = C - D : C$. *Hoc est* dividendo *ut Differentia terminorum primae rationis ad consequentem, ita 2dae rationis differentia terminorum ad suum.* Et convertendo *ut differentia terminorum primae rationis ad suum, ita differentia 2dae rationis ad suum antecedentem.*

DEMON-

DEMONSTRATIO.

6 : 4 = 15 : 10 Quoniam A : B = C : D
2 : 4 = 5 : 10 *per hypoth:* A : C = B : D
2 : 6 = 5 : 15 (§. 148.) consequenter A — B : C — D = B : D = A : C (§. 164.) Ergo A — B : B = C — D : D. Item A — B : A = C — D : C. (§. 148.) *Q.e.d.*

## THEOREMA XXV.

169. *Si fuerit* ordinatè, *ut antecedens primae rationis A ad suum consequentem B, ita antecedens secundae D ad consequentem suum E; & ut consequens primae B ad aliud quidpiam C, ita consequens secundae E ad aliud quidpiam F,* erit ex æquo *antecedens primae A ad C ut antecedens 2dae D ad F.*

DEMONSTRATIO.

4 : 2 = 6 : 3 Quoniam A : B = D : E &
2 : 8 = 3 : 12 B : C = E : F *per hyp:* erit
4 : 8 = 6 : 12 A : D = B : E & B : E = C : F (§. 148.) consequenter A:D = C:F (§. 141.) Quare A : C = D:F (§. 148.) *Q.e.d.*

COROLLARIUM I.

170. Quod si fuerit A : B = D : E & C : B = F : E cum etiam sit B : C = E : F (144.) erit A : C = D : F. (§. 169.)

COROLLARIUM II.

171. Similiter si fuerit A : B = C : D & A : F = C : G : cum etiam sit B : A = D : C (§. 144.) erit B : F = D : G.

COROLLARIUM III.

172. Si deniqué fuerit A : B = C : D & F : A = G : C, cum etiam sit A : F = C : G (§. 148.) erit B : F = D : G.

## THEOREMA XXVI.

173. *Si fuerit* perturbatè *ut antecedens primae*

 *ratio-*

*rationis A ad suum consequentem B, ita antecedens 2dae E ad suum consequentem F, & ut consequens primae B ad aliud quidpiam C, ita aliud quidpiam D ad antecedentem secundae E; erit etiam ex* æquo *Antecedens primae* A *ad* C ut D *ad consequentem 2dae* F.

DEMONSTRATIO.

8 : 4 = 12 : 6 Quoniam A : B = E : F *per*
4 : 16 = 3 : 12 *hyp:* si ponatur B : C = F : G
8 : 16 = 3 : 6 erit A : C = E : G. (§. 169.)

Est verò etiam B : C = D : E *per hypoth:* Ergo D : E = F : G (§. 141.) & D : F = E : G. ( §. 148.) consequenter A : C = D : F. ( 141. ) *Q.e.d.*

COROLLARIUM. I.

174. Quod si fuerit A : B = E : F & C : B = E : D cum etiam sit B : C = D : E (§. 144. ) erit A : C = D : F. ( §. 173.)

COROLLARIUM II.

175. Similiter si fuerit B : A = F : E & B : C = D : E cùm etiam sit A : B = E : F. ( §. 144. ) erit A : C = D : F. ( §. 173. )

COROLLARIUM III.

176. Si porro fuerit B : A = F : E & C : B = E : D, cum sit etiam B : C = D : E ( §. 144. ) erit A : C = D : F. ( §. 175. )

COROLLARIUM IV.

177. Si idem C vel æqualia per majus A & minus B dividas, quotus prior F, erit minor posteriore G. Est enim 1 : A = F : C & 1 : B = G : C (§. 149.) adeoqué A : B = G : F ( §. 175. ) sed A > B *per hypoth:* Ergo G > F ( §. 126. )

AXIOMA XI.

178. *Majus ad idem majorem rationem habet quam minus ex.gr.* 8 : 2 > 4 : 2.

AXIO-

AXIOMA XII.

179. *Quod ad idem majorem rationem habet quam alterum, id altero majus est. e.g.* $8 : 2 > 4 : 2$ *itaqué* $8 > 4$.

AXIOMA XIII.

180. *Idem ad majus minorem rationem habet, quàm ad minus. e.g.* $16 : 4 < 16 : 2$.

THEOREMA XXVII.

181. *Ad quod idem majorem rationem habet, quàm ad alterum, id altero minus est.*

DEMONSTRATIO.

$$\frac{8 : 2 > 8 : 4}{2 < 4}$$

Habeat C ad A rationem majorem quam ad B, *per hypoth:* Ergo pars ipsius C, quæ dicatur D, ad A eandem rationem habet, quam ad B. ( §. 161. ) hoc est D : A = C : B ( §. 129. ) & hinc D : C = A : B (§.148.) sed D < C ( §. 18. ) Ergo A < B. (§.126.) *Q.e.d.*

THEOREMA XXVIII.

182. *Duae quantitates se mutuo multiplicantes idem factum producunt.*

DEMONSTRATIO.

Sint duo factores A & B. erit 1 : A = B : AB & 1 : B = A : BA ( §. 58. ) est verò etiam 1 : A = B : BA(§. 148.)adeoqué B : AB = B : BA.(§.141.) Ergo AB = BA ( §. 152.) *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

183. Sint tres factores A, B & C Qoniam AB = BA ( §. 182. ) erit CAB = CBA ( §. 83. ) adeoqué & ABC = BAC ( §. 182. ) Similiter quia CB = BC ( §. 182. ) erit ACB = ABC. ( §. 83. ) adeoqué & CBA = BCA(§.171.)Quare CAB = CBA = ABC = ACB = BAC = BCA ( §. 77.)hoc est factum idem producitur, quocunqué ordine efficientes in se invicem ducantur.

Ita 3· 4· 5 = 3· 5· 4 = 4· 5· 3 = 4· 3· 5 = 5· 4· 3 = 5· 3· 4 = 60.

THE-

THEOREMA XXIX.

184. *Si factum AB per multiplicandum A dividitur, quotus C est multiplicans; si per multiplicantem B: quotus D est multiplicandus.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam multiplicandus A factum AB, & multiplicans B, quotus C *per hypoth:* erit A : AB = 1 : B ( §. 58. ) & siquidem AB dividitur etiam per A *per hypoth:* A : AB = 1 : C (§.61.) consequenter 1 : B = 1 : C ( §.141.) Ergo B = C ( §.152.) *Q.e.unum.* Similiter siquidem multiplicans B, factum AB, multiplicandus A, quotus D, *per hypoth:* erit 1 : A = B : BA ( §. 58. ) & quoniam AB dividitur per B *per hypoth:* erit etiam 1 : D = B : BA ( §.61. ) consequenter 1 : A = 1 : D (§.141.) Ergo A = D (§.152.) *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

185. Omnia itaqué facta sunt numeri compositi. (§. 68.)

THEOREMA XXX.

186. *Si quotus B per divisorem A aut contra multiplicetur; factum AB est dividendus CD.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam B quotus, A divisor, factum AB, dividendus CD *per hypoth:* erit 1 : A = B : CD (§.149.) & 1 : A = B : AB (§.58.) proinde B : CD = B : AB (§.141.) consequenter CD = AB (§.152.) *Quod erat unum.* Idem verò cum sit factum, si divisor per quotum multiplicetur, ( §.182. ) *Erit alterum.*

THEOREMA XXXI.

187. *Si quatuor quascunqué quantitates proportionales A : B = C : D per alias quatuor E : F = G : H singulas per singulas multiplices, facta inter se proportionalia sunt, nempe AE : FB = GC : DH.*

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Cum ſit *per hypoth:*
A : B = C : D & E : F = G : H.
E F  E F & C D  C D.
Erit EA : FB = EC : DF & CE : FD = CG : DH (§. 160.) ſed EC = CE & DF = FD (§. 182.) Ergo EA : FB = CG : DH. (§. 141.) *Q. e. d.*

THEOREMA XXXII.

188. *Rationis compoſitae exponens eſt aequalis facto exponentium ſimplicium.*

DEMONSTRATIO.

Sit rationis primæ A : B exponens = m ſecundæ C : D exponens ſit = n. erit m : 1 = A : B & n : 1 = C : D (§. 149. 148.) Ergo mn : 1 = AC : BD. (§. 187.) conſequenter mn eſt exponens rationis AC : BD (§. 126. 116.) hoc eſt compoſitæ ex A : B & C : D (§. 135.) *Q. e. d.*

SCHOLION

189. *Sint rationes* 8 : 4 *&* 24 : 6. *Illius exponens eſt* 2, *hujus* 4. *Rationem compoſitam datarum habent* 192 *&* 24. *ſed* 192 : 24 = 8, *quod eſt factum ex* 2 *in* 4. *Caeterum eadem demonſtratio locum habet, ſi plures fuerint rationes.*

THEOREMA XXXIII.

190. *Si plures fuerint quantitates continuè proportionales A, B, C, D &c; prima A ad tertiam C eſt in ratione duplicata, ad quartam D in ratione triplicata &c, primae A ad ſecundam B.*

DEMONSTRATIO.

I. Quoniam A : B = B : C *per hypoth:* AB ad BC rationem duplicatam habet ipſius A ad B (§. 135.) ſed AB : BC = A : C. (§. 155.) Ergo etiam A ad C rationem duplicatam habet ipſius A ad B (§. 141.)

II. Quoniam A : B = B : C = C : D *per hypot:* ABC eſt ad BCD in ratione triplicata ipſius A ad B; (§. 135.) ſed ABC : BCD = A : D (§. 155.) Ergo etiam

etiam A ad D eſt in ratione triplicata ipſius A : B. (§. 141.) *Quod erat alterum.*

III. Facilè apparet quod eodem modo demonſtrari poſſit primum terminum habere ad quintum rationem quadruplicatam, ad ſextum quinduplicatam &c. primi ad ſecundum *Quod erat tertium.*

## THEOREMA XXXIV.

191. *Si fuerit quaecunqué quantitatum A, B, C, D, E, F ſeries, ratio primae A ad ultimam F componitur ex rationibus extremis quantitatum interjacentium. A : B, B : C, C : D, E : F &c.*

### DEMONSTRATIO.

Si enim omnes antecedentes, itidemqué omnes conſequentes in ſe invicem multiplices, facta ABCDE & BCDEF ſunt in ratione compoſita rationum A : B, B : C, C : D, D : E, E : F &c. (§. 135.) ſed ABCDE : BCDEF = A : F (§. 155.) Ergo etiam A : F eſt in ratione compoſita omnium modò recenſitarum (§. 141.) *Q.e.d.*

## THEOREMA XXXV.

192. *Rationes compoſitae ex rationibus quarum ſingulae ſingulis aequales, inter ſe aequales ſunt.*

### DEMONSTRATIO.

6 : 3 = 4 : 2
3 : 1 = 12 : 4
5 : 1 = 20 : 4
90 : 3 = 960 : 32

Sit A : B = C : D & E : F = G : H, I : K = L : M *per hyp:* erit AE : BF = CG : DH. (§. 187.) adeoqué & AEI : BFK = CGL : DHM (§. *cit:*) Ratio verò AEI : BFK componitur ex rationibus A : B, E : F, & I : K ratio CGL : DHM ex rationibus C : D, G : H, L : M (§. 135.) Ergo conſtat propoſitum, *Q.e.d.*

# CAPUT IV.

## *De speciebus Arithmeticæ in numeris fractis.*

### THEOREMA XXXVI.

193. *Si numerator est aequalis denominatori: fractio* $\frac{4}{4}$ *aequivalet integro: si minor; fractio* $\frac{2}{4}$ *minor est integro: si major: fractio* $\frac{5}{4}$ *integro seu unitate major est.*

### DEMONSTRATIO.

Denominator enim indicat unitatem, seu integrum in partes æquales (e.g. in nostro casu in 4) divisum & numerator numerat partes istiusmodi in casu aliquo datas. (§. 51) Quodsi ergo numerator denominatori æqualis *per hypoth:* tot dantur partes, quot habet integrum. Ergo fractio integro æqualis. (§. 85.) *Quod erat primum.*

Si numerator denominatore minor, *per hypoth:* aliquot saltem dantur partes integri non omnes (§. 18.) Ergo fractio tantum aliquot partibus integri æqualis consequenter eadem minor (§. cit.) *Q. e. secundum,*

Si denique numerator major est denominatore *per hypoth:* plures dantur partes, quàm habet integrum, (§. 18.) sed tot partes quod habet integrum integro æquales sunt, (§. 85.) Ergo integrum parti fractionis æquale est, consequenter ipsa integro major. (§. 18.) *Quod erat tertium.*

### SCHOLION.

194. *Fractiones integro aequales, vel eodem majores, dicuntur vulgò spuriae; quia propriè loquendo fractiones non sunt, nisi quae integro minores* (§. 33.)

### PROBLEMA XI.

195. *Invenire quot integra fractio* $\frac{8}{4}$ *quae integrô major est, contineat.*

RESO-

RESOLUTIO.

Numerator 8 per denominatorem 4 dividatur: quotus 2 indicabit quæſitum.

DEMONSTRATIO.

Quotus enim 2 indicat, quoties denominator 4 in numeratore 8 contineatur. (§. 61.) Sed denominator idem eſt cum integro (§. 51.) Ergo quotus indicat, quoties integrum in fractione contineatur. *Q.e.d.*

PROBLEMA XII.

196. *Integros numeros reducere ad fractionem denominatoris dati.*

RESOLUTIO.

I. Multiplicetur numerus integer per denominatorem datum.

II. Factum ſcribatur loco numeratoris.

Ita reperies $3 = \frac{24}{8}$; $5 = \frac{30}{6}$, $7 = \frac{28}{4}$

DEMONSTRATIO.

Eſt factum ad denominatorem datum, ut numerus integer ad unitatem (§. 58. 144.) ſed integrum ad unitatem æquale integro, (§. 116.) Ergo factum ad denominatorem, hoc eſt fractio (§. 108.) æqualis eſt integro (§. 126.) *Q.e.d.*

THEOREMA XXXVII.

197. *Fractiones homogeneae* æquales *ſunt quarum numeratores ad ſuos denominatores eandem rationem habent.* Major eſt, *cujus numerator habet rationem majorem*; minor verò, *cujus numerator habet minorem.*

DEMONSTRATIO.

Cùm fractiones inter ſe ſint homogeneæ *per hyp:* ad eandem unitatem referuntur, (§. 30.) adeoque ipſarum denominatores idem totum referunt (§. 51.) Quare ſi numeratores ad ſuos denominatores eandem rationem habent fractiones æquales ſunt (§. 152)

cujus

cujus verò fractionis numerator ad denominatorem ſuum rationem majorem habet, ea major eſt, cujus numerator minorem habet, ea minor eſt. ( §. 179. ) *Q.e.d.*

Ex: gr: $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$

Sed $\frac{3}{24} < \frac{2}{6}$

SCHOLION.

198. *Intelligitur autem* identitas *fractionum, ſi numerator unius toties contineatur in denominatore ſuo, quoties numerator alterius in ſuo continetur.* Fractio minor eſſe intelligitur, *ſi numerator ipſius pluries continetur in ſuo denominatore, quam numerator alterius in denominatore ſuo; id quod diviſio denominatoris per numeratorem prodit.*

COROLLARIUM.

199. Quodſi ergo tam numerator quam denominator alicujus fractionis $\frac{4}{6}$ per eundem numerum ( 2 ) multiplicetur vel dividatur; in caſu priore facta $\frac{8}{12}$ in poſteriore quoti $\frac{2}{3}$ conſtituunt fractionem datæ $\frac{4}{6}$ æquivalentem (§. 153. 155. 197.)

PROBLEMA XIII.

200. *Invenire communem menſuram maximam duorum numerorum.*

RESOLUTIO.

I. Dividatur numerus major per minorem.

II. Diviſor primæ diviſionis, ſeu numerus datus minor denuo dividatur per reſiduum primæ diviſionis.

III. Similiter diviſor ſecundæ diviſionis dividatur per reſiduum ſecundæ, & ita porro, donec nihil remaneat.

Dico

Dico, diviſorem ultimum eſſe communem menſuram maximam numerorum datorum. *Ex: gr: Sint numeri dati 168 & 240. reperietur eorum communis menſura hunc in modum.*

```
168 ) 240. ( 1.   Prima diviſio.
      168.
      ————
      —72   Reſiduum primæ diviſionis
  72 ) 168 ( 2. Secunda diviſio.
       144
      ————
        24   Reſiduum ſecundæ diviſio:
  24  )  72 ( 3  Tertia diviſio
         72
        ———
         00
```

*Similiter menſura communis maxima numerorum* 95 & 47. *reperitur* 1.

DEMONSTRATIO.

Diviſor ultimus 24 metitur diviſorem antecedentis ( in noſtro quidem caſu ſecundæ ) diviſionis *per hypoth:* & ( §. 66. ) Ergo metitur & dividendum antecedentis ( hoc eſt in noſtro caſu ſecundæ ) diviſionis 168. utpote ex dividendo ultimæ diviſionis 72 aliquoties ( hic quidem bis ) ſumpto & ejus diviſore 24 compoſitum. Metitur adeo numerum unum datorum 168. & etiam metitur reſiduum primæ diviſionis 72, adeoquè & numerum alterum datorum 240 utpote ex minore 168 aliquoties ( in noſtro caſu ſemel ) ſumpto, & reſiduo primæ diviſionis 72 compoſitum metitur. Eſt itaqué 24 in noſtro caſu communis numerorum datorum 168 & 240 menſura ( §. 70. ) Quod etiam numerus 24 ſit menſura maxima numerorum datorum ordine retrogrado per indire-

indirectum demonstratur, si enim ponatur major aliquis quam 24 numerus communis mensura numerorum datorum 240 & 168, metietur etiam mensuram communem in nostro casu 24, ut *patet ex antecedentibus*; sed numerus is eâdem mensura 24 major est *per hypoth:* Ergo communem mensuram inventam 24 metietur numerus major, quam 24, Quod cum sit absurdum ( §. 66. ) major communis mensura non datur. Est igitur ea quam invenimus maxima. *Q.e.d.*

SCHOLION I.

201. *Qui demonstrationem uno quasi obtutu comprehendere cupiunt, illos haec numerorum datorum resolutio juvabit.*

I. $72 = 3 \cdot 24$ per divisionem tertiam.

II. $168 = 2 \cdot 72 + 24$ per divis: sec: $= 2 \cdot 3 \cdot 24 + 24$ per num: 1, $= 7 \cdot 24$

III. $240 = 1 \cdot 168 + 72$ per divis: prim: $= 7 \cdot 24 + 3 \cdot 24$ per num: 1 & 2 $= 10 \cdot 24$

SCHOLION II.

202 *In lineis communis mensura maxima invenitur per mutuam earundem à se invicem subtractionem. In numeris autem compendii gratiâ divisio subtractioni substituitur: ut exemplum ostendit.*

| | | |
|---|---|---|
| 240 | 96 | 48 |
| 168 | 72 | 24 |
| 72 | 24 | 24 |
| 96 | 48 | 00 |

PROBLEMA XIV.

203. *Fractionem datam ad minores terminos reducere: hoc est invenire fractionem datae* $\frac{20}{48}$ *aequivalentem sed minoribus numeris expressam.*

Dividatur tam numerator 20, quam denominator 48. per eundem numerum 4, qui utrumque metitur,

 quoti

quoti 5 & 12 componunt fractionem quæſitam $\frac{5}{12}$ (§. 199.)

COROLLARIUM I.

204. Si ergo diviſio fit per communem menſuram maximam numeratoris ac denominatoris (§. 200.) fractio ad terminos minimos reducitur.

COROLLARIUM. II.

205. Si numeratorem ac denominatorem fractionis datæ ſola unitas metitur; ad minores terminos reduci non poteſt.

## PROBLEMA XV.

206. *Duas vel plures fractiones datas ad eandem denominationem reducere, hoc eſt, invenire fractiones, quae datis aequales ſunt, & communem denominatorem habeant.*

RESOLUTIO.

*Caſus. I.* Si fractiones duæ dentur tota fractio multiplicetur per denominatorem alterius Ex: gr: $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{6} = \frac{2.6}{3.6}$ & $\frac{3.3}{6.3} = \frac{9}{18}$ & $\frac{12}{18}$

*Caſus II.* Si plures dentur, tota quælibet fractio multiplicetur per factum ex denominatoribus reliquarum fractionum ex: gr: $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{6}$ & $\frac{3}{4} = \frac{2.6.4}{3.6.4}$ & $\frac{1.3.4}{6.3.4}$ & $\frac{3.3.6}{4.3.6} = \frac{48}{72}$ & $\frac{12}{72}$ & $\frac{5}{72}$.

DEMONSTRATIO.

Fractiones communem habere denominatorem patet (§. 83. 182.) Quod verò æquivaleant primum propoſitis manifeſtum eſt per §. 199. conſtat ergo propoſitum *Q.e.d.*

## PROBLEMA XVI.

207. *Fractiones addere.*

I. Si fractiones datæ diverſos denominatores habuerint

buerint, reducantur ad eundem(§.206.)

II. Addantur numeratores(§. 86.) & summæ subscribatur denominator communis. Ex: gr: $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{10}{15}+\frac{12}{15}$(§.206.)$=\frac{22}{15}=1\frac{7}{15}$(§. 195.) $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{3}{4}=\frac{48}{72}+\frac{12}{72}+\frac{54}{72}$(§.206.) $=\frac{114}{72}=1\frac{42}{72}$(§. 185.)$=1\frac{7}{12}$(§. 165.)

DEMONSTRATIO.

Cùm denominatores sint nomina unitatum ex quibus numeratores componuntur (51.) numeratores tantum adduntur. Quoniam verò addi nequeunt, nisi fuerint homogenei (53.) ad eandem denominationem sunt reducendi. (30.)

## PROBLEMA XVII.

208. *Fractionem datam ex alia data subtrahere.*

RESOLUTIO.

I. Si fractiones datæ diversos habuerint denominatores reducantur ad eandem denominationem. (§.206.)

II. Numerator unius ex numeratore alterius subducatur (§. 90.) & residuo denominator communis subscribatur. Ex: gr: $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$(§.203.) & $\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{6}{10}-\frac{5}{10}$(§.206.) $\frac{1}{10}$.

SCHOLION. I.

209. *Si fractio data numero integro addenda aut ab illo subtrahenda, numerus integer redigitur ad fractionem adjectâ ipsi pro denominatore unitate:* (§.194.) *Reliqua fiunt juxta resolutionem Problematis XVI. & XVII. Ex: gr:* Sit numero 2. addenda

fractio $\frac{2}{3}$, poterit vel ita addi, $2 + \frac{2}{3}$, vel reducendo ad fractum $\frac{2}{1}$ dein ad communem denominatorem cum fractione data $\frac{2}{3} = \frac{6}{3}$ eritqué $\frac{2}{1} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} + \frac{2}{3}$ (§. 206.) $= \frac{8}{3}$ (§. 207.) $= 2 + \frac{2}{3}$ (§. 195.)

Similiter si à numero 2 subtrahenda fractio $\frac{2}{3}$, erit $2 = \frac{2}{1}$ tandem $= \frac{6}{3}$ (§. 206.) itaqué $\frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ (§. 208.) $= 1 + \frac{1}{3}$ (§. 195.)

## PROBLEMA XVIII.

210. *Fractionem per fractionem aliam multiplicare.*

Ducatur numerator unius fractionis in numeratorem, & denominator unius in denominatorem alterius; facta constituunt fractionem quæsitam.

Ex: gr: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (§. 203.)

### DEMONSTRATIO.

Sit $\frac{A}{B}\left(\frac{2}{3}\right) = A:B$ (§. 63.) $= F$ & $\frac{C}{D}\left(\frac{1}{2}\right) = C:D$ (§. cit:) $= G$. erit $B:A = 1:F$ & $D:C = 1:G$ (§. 61.) Ergo $BD:AC = 1:FG$. (§. 187.) & $AC:BD = FG:1$ (§. 144.) hoc est $\frac{AC}{BD}\left(\frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2}\right) = \frac{FG}{1}$ (§. 63.) $= FG \left(\frac{2}{6}\right)$ (§. 61.) *Q. e. d.*

SCHO-

SCHOLION. I.

211. *Non mirum, quod factum factoribus minùs, cum re vera divisio sit, quae multiplicatio vocatur. Ex: g: $\frac{2}{3}$ multiplicare per $\frac{1}{2}$ idem est, ac invenire dimidium duarum partium tertiarum.*

SCHOLION II.

*Si integer 2 in $\frac{3}{7}$ ducendus est, solus numerator 3 per 2 multiplicandus, eritque* $\frac{2.3}{7}=\frac{6}{7}$

PROBLEMA XIX.

212. *Fractionem* $\frac{A}{B}\left(\frac{4}{5}\right)$ *per aliam fractionem* $\frac{C}{D}\left(\frac{2}{3}\right)$ *dividere.*

RESOLUTIO.

I. Divisor invertatur e.g. loco $\frac{C}{D}\left(\frac{2}{3}\right)$ scribe $\frac{D}{C}$ $\left(\frac{3}{2}\right)$

II. Divisor inversus ducatur in dividendum (§. 210.) quod prodit $\frac{AD}{BC}\left(\frac{12}{10}\right.$ seu $1\frac{1}{5}$ (§. 195.) est quotus quæsitus; qui sit $= G = \frac{AD}{BC}$

DEMONSTRATIO.

Siquidem divisor ad dividendum, ut unitas ad quotum (§. 61.) erit etiam dividendus ad divisorem, ut quotus ad unitatem (§. 144.) Quod si fractiones ad eandem denominationem reducantur (§. 206.) & pro quotis ex divisione numeratorum per denominatorem communem sumantur, (§. 63.) erit numerator fractionis dividendæ ad numeratorem fra-

ctionis dividentis ut fractio dividenda ad fractionem dividentem, hoc eſt AD : BC $= \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BC}{BD}$ (§. 155.) ſed etiam $\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BC}{BD} = G : 1.$ (§. 61. & 144.) conſequenter AD : BC $= G : 1$ (§. 141.) hoc eſt $\frac{AD}{BC} = \frac{G}{1}$ (§. 63.) $= G$ (§. 100.); id eſt, ſi fractio per fractionem dividenda, diviſor invertatur & inverſus ducatur in dividendum (§. 210.) *Q.e.d.*

S C H O L I O N.

213. *Neque vero mirum eſt, quod quoti numeri integri eſſe poſſint, una enim fractio alteram ter, quater, millies &c. continere poteſt. Apparet adeò cum fractiones ſint rationes* (§. 108.) *eas dividere idem eſſe, ac rationum rationes inveſtigare.*

P R O B L E M A XX.

214. *Integrum* (3) *per fractionem* $(\frac{4}{7})$ *dividere*

R E S O L U T I O.

I. Diviſor invertatur ut in Problem: præcedente.

II. Numerus integer datus 3 ducatur in numeratorem 7. diviſoris inverſi.

III. Facto ſubſcribatur éjuſdem denominator 4 quod prodit $\frac{21}{4}$ ſive $5\frac{1}{4}$ eſt quotus quæſitus.

D E M O N S T R A T I O

Eadem eſt cum demonſtratione Problematis præcedentis (§. 212.)

P R O B L E M A XXI.

215. *Integrum cum fracto* $12\frac{3}{4}$ *per integrum cum fracto* $3\frac{5}{6}$ *dividere.*

RESO-

RESOLUTIO.

I. Reducatur uterqué datorum ad eandem denominationem feorfim (§. 196.) ut fit $3\frac{5}{6} = \frac{18}{6} + \frac{5}{6}$ & $12\frac{3}{4} = \frac{48}{4} + \frac{3}{4}$

II. Siquidem funt homogenei (§. 30.) feorfim fibi addantur (§.207.) ut fit $\frac{48}{4} + \frac{3}{4} = \frac{51}{4}$ & $\frac{18}{6} + \frac{5}{6} = \frac{23}{6}$

III. Reliqua omnia fiant ut §. 212. & invenietur quotus $\frac{306}{92}$ (§. cit:) $= 3\frac{30}{92}$ (§. 195.) $= 3\frac{15}{46}$ (§. 199.)

SCHOLION I.

216. *Paffim dicitur Ex: gr: florenos per florenos, groffos per groffos multiplicari ac dividi, fed hic vulgi fenfus eft: multiplicatio autem & divifio non requirit, ut fint quantitates aut numeri homogenei*(§.62.) *In divifione equidem poteft confiderari divifor ut pars dividendi, adeoqué dividendo homogeneus, fed tum quotus qui indicat quoties pars ifta ex fuo toto auferri poteft, nequé dividendo nec divifori eft homogeneus. Multiplicatio verò cùm fit inventio numeri, in quo toties continetur datorum unus, quoties unitas in altero* (§. 59.) *evidens eft, eam non numeros homogeneos, fed numeros unum numeratum, alterum numerantem refpicere* (§. 29.) *Hinc diffolvitur illud fophifma. Floreni duo aequivalent* 60 *groffis. & etiam floreni* 2, *groffis* 60 *etiam aequales funt; floreni tamen* 2 *per florenos* 2 *multiplicati faciunt florenos* 4, *groffi autem* 60 *per groffos* 60 *multiplicati*

 *produ-*

*producunt* 3600 *grossos, hoc est florenos* 120: *cùm tamen siquidem totum est aequale omnibus suis partibus simul sumptis*(§.85.) *factum deberet esse aequale. Sed absurdam illationem ritè perspecta definitio multiplicationis continuò prodit. Si enim floreni* 2, *& ipsis aequales grossi* 60 *toties ponantur quoties unitas in duobus continetur, hoc est bis, erit factum, floreni* 4 = 120 *grossorum facto: utiquè* = 4 *florenis.*

SCHOLION II.

217. *Exponitur subinde in Arithmetica Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio linearum, sive geometrica; verùm si lineae ad unitatem quandam seu mensuram aliquam referantur*(§.9. &10.)*tum dictae species quatuor eodē modō quo numeri quicunquè tractabuntur; videlicet ita sibi addentur, subtrahentur &c, & tunc* lineam in lineam ducere *idem erit ac lineae unius partes sive numerum per lineae alterius partes, sive numerum multiplicare. Sed quoniam per lineam in lineam angulo recto insistentem area oritur, cujus contemplatio ad geometriam spectat, ejusmodi multiplicationem, uti & ipsarum Arearum additionem subtractionem, divisionem eidem geometriae reservamus.*

## CAPUT V.

### *De potentiis numerorum, Genesi præsertim ac Analysi numerorum quadratorum & cubicorum.*

DEFINITIO LIII.

218. Si numerus quicunqué 2 in se ipsum ducatur; factum 4 *Numerus Quadratus* ipse autem intuitu hujus *Radix Quadrata* appellatur

COROLLARIUM.

219. Cùm sit ut unitas ad radicem quadratam ita radix ad ipsum quadratum ( §. 58. 218. ) erit radix media proportionalis inter unitatem & quadratum ( §. 133. )

DEFI-

DEFINITIO LIV.

220. Si numerus quadratus 4 itidem per radicem 2 multiplicetur, factum 8 dicitur *numerus cubicus*, seu *cubus*, & radix 2. ejus intuitu *Radix cubica*.

COROLLARIUM.

221. Cùm sit ut unitas ad radicem, ita radix ad quadratum (§. 58. 218.) & ut unitas ad radicem ita quadratum ad cubum (§. 58. 220.) erit etiam radix ad quadratum ut quadratum ad cubum(§.141.) hoc est unitas, radix quadratum & cubus in continua proportione sunt (§.133.) & radix cubica est primus ex duobus numeris mediis continuè proportionalibus inter unitatem & cubum.

DEFINITIO LV.

222. Cùm istiusmodi multiplicatio in infinitum possit fieri, inde facta orta generali nomine *Potestates*, *Potentiæ*, *dignitates* appellantur.

DEFINITIO LVI.

223. *Exponens dignitatis* est numerus, qui indicat, quoties dignitas data per radicem dividenda, antequam ad unitatem perveniatur. Ita exponens quadrati est 2, cubi 3. (§. 218. 220.)

DEFINITIO LVII.

224. Omnes ferme hodie distingvunt dignitates optimè per exponentes ita, ut Radix dicatur, *Dignitas* 1ma. Quadratum *Dignitas* 2da, cubus 3tia &c. Qui *Arabes* sequuntur

tur, ſingulis potentiis peculiaria imponunt nomina, diverſa tamen ab iis, quibus cum Diophanto (a) utuntur Vieta (b) & Oughtredus (c) Nomina Arabum ſunt: Radix, quadratum, cubus, quadratoquadratum, ſeu biquadratum, ſurdeſolidum, quadratum cubi, ſurdeſolidum ſecundum &c.

Multi quadratum vocant *Zenſum* Hinc compoſita: *Zenſiſenſus zenſicubus, Zenſizenzenſus zenſurdeſolidus &c.*

HYPOTHESIS XIII.

225. *Qui Arabum denominationes retinent, potentiarum ſignis ſequentibus utuntur.*

1.R. 2.Ʒ. 3.C. 4.ƷƷ. 5.ß &c.

*Multò commodiùs Carteſius (d) Radici ſuperiùs à dextris jungit exponentem.*

Ex: gr: Si a fuerit radix, erunt potentiæ ipſam ſequentes $a^{2}$, $a^{3}$, $a^{4}$, $a^{5}$, $a^{6}$, &c. vel ſi $a = 2^{2}$, $2^{3}$, $2^{4}$, $2^{5}$, $2^{6}$, &c. ita ut ſit $2^{2} = 4$, $2^{3} = 8$, $2^{4} = 16$. &c.

DEFINITIO LVIII.

226. Quantitatem ad dignitatem deſideratam evehere idem eſt, ac invenire factum ex ipſa aliquoties in ſe ducta emergens. Ex: gr: 2 evehere ad dignitatem tertiam idem eſt, ac invenire factum 8, cujus factores 2.2.2.

DEFI-

(a) *In libris Arithmeticorum.*
(b) *In Iſagoge in artem Analit: c. 3.*
(c) *In clave Mathemat: c. 12.*
(d) *In Geometria.*

DEFINITIO LIX.

227. Ex dignitate dàta *radicem extrahere.* vel *latus educere* idem eſt ac invenire numerum 2, qui aliquoties in ſe ipſum ductus datam potentiam (ex:gr: tertiam)8 producit.

SCHOLION

228. *Cùm dignitates ſuperiores nonniſi in Analyſi uſum habeant, in praeſenti geneſin & Analyſin quadratorum & cuborum tantùm tradimus. Radices verò quadratas ac cubicas extracturus omnium unitatum quadratos & cubicos numeros noſſe debet, quos ſequens tabula exhibet.*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Radices | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Quadrati | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 46 | 81 |
| Cubi | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 | 343 | 512 | 729 |

DEFINITIO LX.

229. *Radix* tam quadrata, quam cubica aut dignitatis ſuperioris cujuſcunqué dicitur *Binomia,* ſi ex duabus: *Trinomia.* ſi ex tribus: *Multinomia* ſive *Polynomia,* ſi ex pluribus, quàm duabus partibus conſtet.

THEOREMA XXXVIII.

230. *Potentiae ejuſdem gradûs ſunt in ratione tantuplicata laterum, quot unitates habet exponens earundem: hoc eſt;* Quadrata *habent rationem duplicatam,* cubi *triplicatam: Quadrato-quadrata quadruplicatam &c. rationem ſuarum radicum.*

DEMONSTRATIO.

Potentiæ prodeunt, ſi radices A & B aliquoties in ſe ipſas ducas (§. 222.) Quare cum eadem radix

A ad

A ad eandem radicem B eandem habeat rationem; ratio quadratorum componitur ex duabus, cuborum ex tribus, Quadrato-quadratorum ex quatuor, reliquarum potentiarum ex tot rationibus ſimilibus, quot exponens earundem habet unitates. Ergo quadrata habent rationem duplicatam, cubi triplicatam &c. cæteræ potentiæ ratione tantuplicatam ſuarum radicũ, quot unitates habet exponens earundẽ. (§. 135. 226.) *Q.e.d.*

## THEOREMA XXXIX.

231. *Quantitatum proportionalium, Potentiae eaedem ſunt proportionales.* Hoc eſt ſi *radices ſint proportionales, erunt etiam quadrata, cubi &c. proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

Potentiæ eædem habent rationem multiplicatam ipſarum A : B, B : C, C : D, D : E &c. vel A : B, C : D E : F &c. (§. 230.) ſed hæ rationes omnes inter ſe eædem ſunt *per hypoth:* Ergo potentiæ iſtæ e.g. $A^2$, $B^2$, $C^2$, $D^2$, $E^2$, &c. conſtituunt rationes compoſitas ex rationibus, quarum ſingulæ ſingulis æquales ſunt (§. 222.) conſequenter eaſdem, (§. 192.) atque adeo proportionales (§. 132.) *Q.e.d.*

## THEOREMA XL.

232. *Numerus quadratus radicis binomiae, componitur ex quadrato partis primae, ex facto duplo primae in alteram & ex quadrato partis alterius.*

DEMONSTRATIO.

Numerus quadratus prodit, ſi radix in ſe ipſam ducitur; (§. 218.) utraque verò pars radicis ſigillatim ducitur in utramque ſimul (§. 97.) Quare productum componi debet 1*mò* ex facto partis primæ in ſe ipſa n hoc eſt ex quadrato partis 1mæ (§. 218.) 2*do* ex facto partis 1mæ in ſecundam & ex facto 2dæ in primam,

hoc

hoc eſt ex duplo facto 1mæ in ſecundã (§. 182. 183.) 3tio deniqué ex facto partis 2dæ in ſe ipſam, hoc eſt ex quadrato partis 2dæ (§. 218.) *Q. e. d.*

SCHOLION I.

233. *Demonſtratio eſt ocularis, ſi in quocunqué exemplo ſingulari multiplicatio non actu peragitur, ſed indicatur quo in caſu pro exemplo univerſali eſt in eum fermé modum quo figurae in geometria ſunt; e.g. Sit radix binomia* 34 = 30 + 4; *erit*

| | |
|---|---|
| 30 + 4. | Radix binomia. |
| 30 + 4. | |
| 16 | *Quadratum partis II.* |
| 120 | *Facta ex I. in II.* |
| 120 | |
| 900 | *Quadratum partis I.* |
| 1156 | *Quadratum totius.* |

*Inſigne hoc artificium vires imaginationis miré extendit, & intellectum juvat cùm in demonſtrationibus concipiendis, tum in propoſitionibus inveniendis.*

COROLLARIUM I.

234. Cùm parte dextrâ ſive ſecundâ unitates, parte ſiniſtra ſive primâ decades ſcribantur (§. 44.) quadratum partis ſecundæ in loco dextimo, factum duplum unius in alteram in loco ſecundo. Quadratum deniqué partis 1mæ in tertio loco à dextimo ponẽdum. (§. 43.)

SCHOLION II.

235. *Scilicet quadratum partis dextimae nullam adjunctam habet cyphram, duplo facto ex parte una in alteram, cyphra una; quadrato autem partis ſiniſtrae duae cyphrae junguntur, ut numeri ſolitarie poſiti juſtum locum occupent* (§. 43.)

CОROL-

COROLLARIUM II.

236. Si radix multinomia fuerit; partes duæ aut plures finiſtimæ habeantur pro una & etiam patebit, quadratum numeri cujuſcunquè componi ex quadratis ſingularum partium, & ex factis duplis cujuſcunqué partis in omnes ipſa hac parte ſiniſteriores, ut adeò Theorema unum compoſitioni omnium numerorum quadratorum ſufficiat.

SCHOLION III.

237. *Sit radix 346, ſumatur 340 pro parte una, & 6 pro altera erit* ( §. 232. )

| | |
|---|---|
| 340+6 | |
| 340+6 | |
| 36 | *Quadratum partis III..* |
| 2040 | *Facta ex parte III in I & II par-* |
| 2040 | *tem ſimul.* |
| 1600 | *Quadratum partis II.* |
| 12000 | |
| 12000 | *Facta ex parte I in II.* |
| 90000 | *Quadratum partis I.* |
| 119716. | *Quadratum totius.* |

COROLLARIUM III.

238. Quò in loco ſingula producta ponenda ex corollario primo,& ejus ſcholio intelligitur (§.234. 235. ) Habenda nimirum eſt ratio cyphrarum numeris in ſe invicem ductis adjungendarum, ſi ſolitarii ponantur ut ſibi debitum locum occupent.( §. 43. )

SCHOLION IV.

239. *Extractio radicis quadratae aliàs taedii plena, facillima evadit, ubi quadratis per Theorema praeſens componendis operam priùs dederis.*

THEOREMA XXII.

240. *Ex numero quocunqué dato radicem quadratam extrahere.*

RESO-

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

I. Numerus propoſitus diſtingvatur in claſſes, duas notas claſſi unicuiqué aſſignando initiô à dextra facto. Tot enim erunt partes radicis, quot claſſes habentur ( §. 218. 236.)Notandum autem quod claſſi ſiniſtimæ ſubinde nonniſi nota una relinquatur. ( §. 218. )

II. Cùm in claſſe ſiniſtima reperiatur quadratum notæ ſiniſtimæ radicis ( §. cit: ) in *Tabula radicum* ( §.228. ) quæratur numerus ei vel æqualis, vel proximè minor, & ex ipſo ſubtrahatur; radix verò ejus poſt lunulam ſcribatur.

III. Quoti inventi duplum pro diviſore ponatur ad latus ſubſequentis claſſis cum priore ſi quod fuerat reſiduo. Tum in duabus notis ſiniſtimis inquiratur novus quotus per *Abacum Pythagoricum* ( §. 95. ) inventuſquè poſt lunulam ſcribatur: eſt enim pars 2da radicis ( §. 232. 184. )

IV. Summa quadrati radicis, & facti ejuſdem radicis in diviſorem ( §. 234. ) ſubducatur ut in diviſione fieri ſolet.

V. Quodſi operatio juxta regulam tertiam & quartam, in reliquis claſſibus iteretur, prodibit radix quæſita ( §. 236. 232. ) *Q. e.f.&d.*

```
Ex: gr:    11 | 56 (34.   Radix binomia.
            9 |  -    -   Quadratum Part:I.
         ------------
        6) 2 | 56
           2 |  -   -  -  Dupl: F. P. I. in alt:
              16       -  Quadr: P. alterius.
         ------------
           2 56           Sum: Quadr: Rad: &c.
      Nihil reſidui.
```

Item

```
11 | 97 | 16 (346  Radix trinomia.
 9          ..
6) 2|97
   2 4     | .. Duplum fact: Part. I. in alteram.
     16    | .. Quadratum partis alterius.
   2 56    | .. Sum: Q.R.& Fac. ejusd: R. in Divis:
68)  41    | 16  Clas: subseq: cum suo resid:
     40    | 8   Dupl: Fact: Par. I. in alteram.
               36  Quadratum P. alterius.
     41      16  Sum: Quadr. R.& F. ejus: R. in D.
     00      00
```

## PROBLEMA XXIV.

241. *Radicem quadratam ex fractione data extrahere, cujus numerator & denominator est numerus quadratus.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam numerum fractum per fractum multiplicans unius numeratorem in numeratorem alterius, & denominatorem pariter in denominatorem alterius ducit, ( §. 210. ) Quadratum autem ex facto ejusdem numeri in se ipsum generatur, ( §. 218. ) Radix itaque quadrata tam ex denominatore quam ex numeratore seorsim extrahi debet. *Q. e. f. & d.*

Ita radix quadrata ex $\frac{4}{9}$ est $\frac{2}{3}$ ex $\frac{49}{144}$ est $\frac{7}{12}$

COROLLARIUM I.

242. Cùm numeri integri ad fractionem denominatoris dati reducantur, si per hunc multiplicentur, & facto tanquam numeratori denominator datus subscribatur, ( §. 196. ) si numerus datus, qui quadratus non est ad fractionem reducatur cujus denominator est quadratus, & ex fractione extrahatur radix ( §. 241. ) fractio quæ prodit, radicem propè veram exhibet in istiusmodi partibus quas denominatoris quadrati radix indicat.

SCHO-

SCHOLION I.

243. *Ex: gr: Sit ex 20 extrahenda radix prope vera: quae non deficiat in partibus decimis, multiplica 20 per centum, ut prodeat fractio* $\frac{2000}{100}$ *cujus radix* $\frac{44}{10}$ *sive* $4\frac{4}{10}$ *exhibet radicem ne quidem parte decima à vera magnitudine deficientem, seu cujus defectus minor est quam* $\frac{1}{10}$. *Nam si fiat quadratum* $16 + \frac{32}{10} + \frac{16}{100}$ (§. 232.) *aequale* $19\frac{36}{100}$ (§. 207.) *evidens est, nec unitatem ex decem deesse ad* 20; *Nam* $\frac{36}{100}$ *est major fractio quam* $\frac{1}{10}$ (§. 197. & 198.) *Similiter in alterius cujuslibet denominatoris partibus e.g.* 6, 7 &c. *Radix propè vera invenitur.*

COROLLARIUM II.

244. Quoniam numerum per articulum primarium veluti 10, 100, 1000 &c. multiplicantes eidem nonnisi cyphras 0, 00, 000 jungimus (§.98.) Radicem propè veram in fractionibus decimalibus desiderans, numero qui quadratus non est, 2, 5, 6, &c. cyphras junge dextrorsum, & operationem continua: ita enim prodibit radix propè vera in partibus decimis, centesimis millesimis &c. &c. (§. 243.)

SCHOLION II.

245. Ex: gr: *Sit extrahenda radix quadrata ex* 345 *prodibit* $18\frac{57}{100}$

```
               57
345 (18 ───
              100
  1
 ───
2) 245
   16
    64
   224
   ────
36)   2100
      180
        25
      1825
    ──────
370) - 27500
       2590
          49
       25949
   ───  ─────
       1551      &c.
```

SCHOLION III.

246. *Si tabulis numerorum quadratorum pro radicibus ab* 1 *usque ad* 1000 *utaris; in iis evolvi potest numerus quadratus proximè minor eô, qui tres classes sinisteriores occupat. Ita sine ullo labore habentur tres notae priores e. g. in nostro casu* 294, *plures notae inveniuntur, si tabulae longiùs extendantur.*

```
       8 | 69 | 7.5   ( 294 9/10
       8 | 64 | 3.6
    ─────────────────────────
588 )   5  3  9 | 00
        5  2  9 | 2
                 81
           53001
            ────
            899
```

## THEOREMA XLI.

247. *Numerus cubicus radicis binomiae componitur ex numeris cubicis duarum partium, ex facto tripli quadrati partis primae in secundam, & ex facto tripli quadrati partis secundae in primam.*

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Numerus cubicus prodit,ſi quadratum per radicem multiplicetur ( §. 220. ) ſed quadratum radicis binomiæ componitur ex quadratis partium,& facto duplo ex parte una in alteram ( §. 232. ) Quare cubus componitur ex cubo partis primæ, ex triplo facto quadrati partis primæ in ſecundam, ex triplo facto quadrati partis ſecundæ in primam; hoc eſt ex facto tripli quadrati partis primæ in ſecundam & facto tripli quadrati partis ſecundæ in primam ( §. 182. ) atqué ex cubo partis ſecundæ ( §. 220. ) *Q.e.d.*

SCHOLION I.

248. *Demonſtrationem ocularem denuò ſiſtit exemplum ſingulare,in quo multiplicatio tantum indicatur. Sit e.g.* 34 *ſeu* 30 + 4 erit.

| | |
|---|---|
| 30 + 4 | Radix. |
| 16 | *Quadratum partis II.* |
| 120 ) | *Facta ex I in II.* |
| 120 ) | |
| 900 | *Quadratum partis II.* |
| 64. | *Cubus P. II.* |
| 480 ) | *Facta ex quadrato II. in I.* |
| 480 ) | |
| 3600 | *Factum ex quadrato I.in II.* |
| 480 | *Factum ex quadrato II. in I.* |
| 3600 ) | *Facta ex quadrato I. in II.* |
| 3600 ) | |
| 27000 | *Cubus partis I.* |
| 39304 | *Cubus totius.* |

SCHOLION II.

249. *Si cui ſubobſcurior haec Wolfii reſolutio, juvabit eum hunc in modum inſtituta multiplicatio.*

Sit dicta radix 34 seu 30 + 4 evehenda ad cubum: erit

30 + 4

30 + 4

30 . 4 + 4 . 4

30 . 30 + 30 . 4

30 . 30 + 30 . 4 + 30 . 4 + 4 . 4

30 + 4

30. 30 . 30 . 4 + 30 . 4 . 4 + 30 . 4 . 4 + 4 . 4 . 4

30 . 30 . 30 + 30 . 30 . 4 + 30 . 30 . 4 + 30 . 4 . 4

. - - - A - - - . - - - - - - B - - - - . - - - - - . - - - - - - C - - - - - - - - - . - - D - .

$$\begin{array}{l}
.\text{--A---}.\ \text{------B----}.\text{----}\ .\ \text{------C--------}\ .\text{--D-}.\\
30.30.30 + 30.30.4 + 30.30.4 + 30.30.4 + 4.4.30 + 4.4.30 + 4.4.30 + 4.4.4\\
\qquad\qquad : \qquad\qquad\qquad \text{hoc est} \quad : \qquad\qquad\qquad\qquad :\\
\hline
30.30.30 + 900.4 + 900.4 + 900.4 + 16.30 + 16.30 + 16.30 + 4.4.4
\end{array}$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Cubus Partis I.* | A | 27000 | = | 30.30.30. | | = | 27000 |
| *Factum tripli Quadrati Partis I. in II.* | B | ( 3600 | = | 900.4 ) | | = | 10800 |
| | | ( 3600 | = | 900.4 ) | | | |
| | | ( 3600 | = | 900.4 ) | | | |
| *Factum tripli Quadrati Partis II. in I.* | C | ( 480 | = | 16.30 ) | | = | 1440 |
| | | ( 480 | = | 16.30 ) | | | |
| | | ( 480 | = | 16.30 ) | | | |
| *Cubus Partis II.* | D | 64. | = | 4.4.4 | | = | 64 |
| *Cubus totius.* | | 39304 | | *Cubus totius,* | | | 39304 |



COROL-

COROLLARIUM I.

250. Cùm parte dextrâ unitates, ſiniſtra decades ſcribantur, &c. (§. 44.) Numerus cubicus dextræ in loco dextimo, factum ex triplo quadrato partis ſiniſtræ in dextram in ſecundo; factum ex triplo quadrato partis dextræ in ſiniſtram in tertio, cubus deniqué partis ſiniſtræ in quarto loco terminatur. (§. 43.)

COROLLARIUM II.

251. Si radix multinómia fuerit, duæ vel plures notæ ſiniſtimæ habeantur pro una, & continuo patet, cubum quemlibet componi ex cubis ſingularum partium radicis, & ex factis quadrati tripli quarumlibet ſiniſteriorum in proximè dexteriorem, itemqué ex factis tripli quadrati cujuſlibet dexterioris in omnes ſiniſteriores.

SCHOLION III.

252. *Sit radix 346. ſume 340 pro parte una radicis, erit 6 pars altera, conſequenter* (§. 247.)

| | |
|---|---|
| 346 | |
| 346 | |
| 90000 | *Quadratum P. I.* |
| 12000 ) | *Facta ex I. in II.* |
| 12000 ) | |
| 1600 | *Quadratum P. II.* |
| 115610 | *Quadratum P. I. & II. ſimul.* |
| 2040 ) | *Fact: ex P. III. in I. & II. ſimul.* |
| 2040 ) | |
| 36 | *Quadratum P. III.* |
| 27000000 | *Cubus P. I.* |
| 3600000 | |
| 3600000 ) | *Facta ex Quadrato P. I. in II.* |
| 3600000 ) | |

480000

| | |
|---|---|
| 480000 <br> 480000 <br> 480000 | *Facta ex Quadrato P. II. in I.* |
| 64000 | *Cubus P. II.* |
| 693600 <br> 693600 <br> 693600 | *Facta ex Quadrato P. I. & II. in P. III.* |
| 12240 <br> 12240 <br> 12240 | *Facta ex Quadrato P. III. in P. I. & II. simul.* |
| 216 | *Cubus Partis III.* |
| 41421736 | *Cubus totius.* |

*Notandum scilicet; sectionem numeri in duas partes arbitrariam esse, cumqué Theorema generaliter de radice utcunqué in duas partes divisa statuat, idem quoqué ad quamlibet sectionem applicari potest. e.g. numerus* 346 *non solùm in* 340 *&* 6, *vel in* 300 *&* 46, *sed etiam in* 195 *&* 151, *in* 89 *&* 257 *& in duas quascunqué partes alias stante Theoremate dividi potest: id quod etiam tentanti palam fiet, modò notetur, si numerus divisus non habeat adjunctos zeros, facta omnia cum sint unitatum, scribantur in locò unitatum.*

*Caeterum idem valet in numeris quadratis, imò in genere in omnibus potentiis.*

*Quod si cui haec obscuriora, is eadem omnia poterit invenire eô modô qui in scholio* II. §. 249 *datus est, sed multiplicatio prolixior evadit. Ne tamen quidpiam obscuritatis remaneat, secabitur cubus radicis trinomiae in dictas partes sub tempus praelectionum.*

COROLLARIUM III.

253. In quibus autem locis singula terminentur facta, ex corollario primo ( §. 250. ) colligitur: habenda nimirum & hic est ratio cyphrarum nume-

ris in ſe invicem ductis addendarum, ſi ſolitarii ponantur, vide in ſcholio II. Exemplum §. 249.

## PROBLEMA XXIV.

254. *Ex numero dato radicem cubicam extrahere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

I. Numerus datus diſtingvatur in claſſes tres notas unicuiqué aſſignando, initiô à dextris facto. Etenim ex tot notis radix componitur quot claſſes emergunt. ( §. 220. 247. ) claſſis verò ſiniſtima unam vel duas notas habere poteſt.

II. In tabula radicum ( §. 227. ) quæratur numerus cubicus eô numerô proxime minor, qui in claſſe ſiniſtima continetur niſi ipſe in eadem inveniatur; atqué ab hoc ſubtrahatur, ejus verô radix poſt lunulam ſcribatur, eſt enim pars prima radicis. ( §. 220. )

III. Quotſi inventi quadratum triplum( §. 247. 250. ) ponatur pro diviſore ad latus ſubſequentis claſſis cum priore ſi quot fuerit reſiduo. Tum in tribus aut quatuor notis ſiniſtimis inquiratur novus quotus per abacum Pyth: ( §. 95. ) ) inventuſqué poſt lunulam ſcribatur: eſt enim pars ſecunda radicis. ( §. 247. 184. )

IV. Diviſor ducatur in novum quotum, & productum ſcribatur ſub nota tertia primæ claſſis à ſiniſtris numerando; ſub nota verò ſecunda dictæ claſſis terminetur factum ex triplo quadrato novi quoti in præcedentem, ſub dextima denique cubus novi quoti. Hæc tria facta in unam ſummam collecta ex notis numeri cubici ſupraſcriptis ſubtrahantur ( §. cit: )

V. Quod ſi operatio per reliquas claſſes juxta regulam tertiam & quartam continuetur, prodibit radix quæſita. ( §. 251. 184. ) Ex: gr:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 47 | 437 \| 928 | ( 362 |
| | | 27 | | |
| *Tripl: Q.P.I. seu Divisor* | 27) | 20 | 437 | |
| *Fac: ex Div: in Quotum* | | 16 | 2 | |
| *Fact: ex trip; Q. novi Q. in praec:* | | 3 | 24 | |
| *Cubus novi Quoti.* | | | 216 | |
| *Summa Factorum.* | | 19 | 656 | |
| *Tr: Q.P.I. seu Div:* | 3888) | | 781,928 | |
| *Fact: ex Div: in quotum.* | | | 777 \| 6 | |
| *F: ex Tr: Q.N.Q. in praeced:* | | | 4 \| 32 | |
| *Cubus N. Q.* | | | \| 8 | |
| *Summa Factorum* | | | 781 \| 928 | |
| | | | 000000 | |

## PROBLEMA XXV.

255. *Radicem cubicam ex fractione extrahere, cujus numerator & denominator cubus est.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Eôdem quo supra §. 241. modô patet radicem sigillatim ex numeratore & denominatore extrahendam esse.

Ita radix ex $\frac{27}{343}$ est $\frac{3}{7}$; ex $\frac{64}{729}$ est $\frac{4}{9}$

COROLLARIUM I.

256. Hinc etiam eôdem quô supra modô §. 242. Radix prope vera in fractione dati denominatoris invenitur, si numerus, qui cubus non est per hujus denominatoris cubum multiplicetur, & radici cubicæ ex facto extractæ tanquam numeratori denominator datus subiiciatur.

SCHOLION I.

257. *Ex: gr: Si ex 12 extrahenda radix cubica prope vera defectu minore quam* $\frac{1}{8}$, *ducatur 12 in*

512

512 *cubum ipſius* 8, *& ex facto* 6144 *extrahatur radix cubica* 18 *erit* $\frac{18}{8}$ *ſeu* 2 $\frac{2}{8}$ *radix prope vera cujus defectus eſt minor quam* $\frac{1}{8}$ *nam ſi elevetur ad cubum id ut ſupra in quadratis apparebit* ( §.243. )

COROLLARIUM. II.

258. Imò inde ulteriùs etiam (§.244.) conſequitur. Radicem propè veram in fractionibus decimalibus inveniri ſi reſiduo numero qui cubus non eſt 3, 6, 9 &c. cyphræ à dextris jungantur pro decimis centeſimis, milleſimis pârtibus & operatio juxta §. 244. continuetur.

SCHOLION II.

259. *Ex: gr: Sit extrahenda radix cubica ex* 3, *eam reperies* 1 $\frac{44}{100}$

```
      3     ( 1 44
      1         100
    -----  -------
 3)  2 | 000
     1 | 2
       | 48
       |  64
    ------------
       1 | 744
588)      256 | 000
          235 | 2
            6 | 72
              | 64
    ------------------
        241 | 984
    ------------------
         14 | 016
```

SCHOLION. III.

260. *Si tabulis numerorum cubicorum utaris idem*

*idem compendium facere licet quod supra §. 246. in extrahenda radice quadrata commendavimus.*

## PROBLEMA XXVI.

261. *Examinare extractionem radicis quadratae ac cubicae.*

RESOLUTIO.

I. Radix quadrata inventa ducatur in se ipsam, & facto residuum si quod fuerit, addatur. Quod si numerus prodeat, ex quo Radix extracta, erit numerus inventus radix quadrata dati vel exacta, vel si talem non habuerit prope vera. ( §. 218. )

*Ex: gr: Radicem Quadratam prope veram ex 345 supra §. 245. invenimus* $18\frac{57}{100}$ *Duc radicem 1857 in se ipsam, & facto 3448449 adde residuum 1551 prodibit numerus 345, ex quo extractio fieri debebat, quatuor cyphris auctus, ut in extractione ad inveniendas centesimas factum fuerat*

```
    1857
    1857
   -----
   12999
   9285
  14856
  1857
 -------
 3448449
    1551
 -------
 3450000.
```

II. Radix cubica inventa ducatur in se ipsam & factum denuo in eandem. Producto posteriori addatur si quod fuerat residuum. Quod si numerus prodeat, ex quo extractio facta, operatio ritè peracta. (§.220.)

*Ex: gr: Superiùs §. 259 radix ex 3 est extracta* $1\frac{44}{100}$. *Duc hanc radicem 144 in se ipsam & factum 20736. denuò in 144. Producto alteri 2985984 adde quod supra residuum erat 14016. Aggregatum est 3 sex cyphris aucta ut in operatione factum fuerat.*

```
     144
     144
    ----
     576
    576
   144
   -----
   20736
     144
  ------
   82944
  82944
 20736
 -------
 2985984
   14016
 -------
 3000000
```

THEO.

## THEOREMA XLII.

262. *Exponens rationis quadratorum eſt quadratum: Cuborum cubus: & in genere potentiarum cujuſqué gradûs exponens rationis eſt potentia ejuſdem gradus exponentis radicum.*

DEMONSTRATIO

Quadrata habent rationem duplicatam; cubi triplicatam; & in genere potentiæ cujuſcunqué gradûs rationem multiplicatam ſuarum radicum. (§. 230.) Quare cum exponens rationis compoſitæ ſit æqualis facto exponentium ſimplicium (§. 188.) & cum iſte exponens ſimplicium rationum idem ſit in omnibus rationibus ex quibus componuntur duplicatæ triplicatæ & in genere multiplicatæ quæcunqué rationes (§. 135.) Si ducatur bis in ſe erit exponens quadratum. Si ter cubus &c. hoc eſt exponens rationis duplicatæ erit quadratum (§. 218.) triplicatæ cnbus (§. 220.) & in genere multiplicatæ cujuſcunqué rationis exponens eſt potentia exponentis radicum. (§. 222.) *Q. e. d.*

## THEOREMA XLIII.

263. *Si ex diviſione numeri quadrati per quadratum, cubi per cubum, & in genere potentiae cujuſcunqué per aliam ſimilem numerus integer prodit, etiam ex diviſione radicis per radicem integer prodire debet.*

DEMONSTRATIO.

Quotus ex diviſione numeri quadrati per quadratum, cubi per cubum, & in genere potentiæ cujuſcunqué per aliam ſimilem emergens eſt exponens rationis quadratorum, cuborum, vel in genere potentiarum ſimilium ſe mutuo dividentium (§. 114.) Adeoqué quadratum, cubus & in genere potentia exponentis radicum (§. 262.) Quare cum quotus ex diviſione potentiæ unius per aliam eſt numerus rationalis integer *per hypoth:* erit idem quotus numerus rationalis integer

teger quadratus, cubus vel potentia alterius gradûs. Sed quadrati cubi & cujuſcunqué potentiæ numeri rationalis integri radix etiam numerus integer rationalis eſſe debet. (§. 222.) Ergo exponens radicum hoc eſt quotus ex diviſione radicis per radicem numerus integer rationalis eſſe debet. *Q.e.d.*

C O R O L L A R I U M.

264. Quare ſi radix radicem non metitur, nec quadratum quadratum, nec cubus cubum, nec potentia quæcunqué aliam ſimilem metitur (§. 66.) conſequenter fractio integro major ex iſtiuſmodi quadratis, cubis, vel potentiis qubuſcunqué ſimilibus compoſita ad numerum integrum irreducibils. (§. 195. 242)

T H E O R E M A XLIV.

265. *Si numeri integri non datur radix in integris; nec dabitur per fractos.*

D E M O N S T R A T I O.

Ponamus dari numerum fractum, qui ſit radix, ex ejus itaqué iterata multiplicatione per ſe ipſum produci debet numerus datus (§. 222.) ſed quotieſcunqué fractum per ſe ipſum multiplicas, productum ſemper eſt fractus (§. 210.) iſqué in præſenti caſu ad integrum irreducibilis. (§. 264.) Quare cum numerus datus ſit integer *ex hypoth:* fractus ejus radix eſſe nequit. *Q.e.d.*

C O R O L L A R I U M.

266. Jam cum numeri primi in ſe ex nullo alio alio numero in ſe aliquoties ducto oriantur, (§. 67.) Ex numeris primis in ſe nulla radix perfecta extrahi poteſt in integris. (§. 227.) adeoqué nec per fractos dari poteſt. (§. 265.)

H Y P O T H E S I S XIII.

267. *Interdum utile eſt extractionem radicis tantum indicari praeſertim ſi perfecta haberi non poteſt. Eſt autem ſignum radicale ſequens* ($\sqrt{}$) *cui in vertice praeſi-*

*praeſi-*

*figitur exponens dignitatis, si altioris gradûs, quam quadrata fuerit. Ex. gr.* $\sqrt{2}$ *denotat radicem quadratam ex* 2, $\sqrt[3]{5}$ *denotat Radicem cubicam ex* 5.

SCHOLION.

268. *In Geometria & Analysi demonstrabitur, tales radices, quae actu dari non possunt, esse ad unitatem ut rectam lineam ad rectam aliam, consequenter numeros (§. 9.) eosque irrationales; cum ex hypothesi rationales non sint.* Dicuntur vulgo numeri Surdi; quamvis olim hujus vocis significatus strictior fuerit. (b) Et olim, & nunc interdum Radicales appellantur.

---

# CAPUT VI.

## *De Regulis Proportionum.*

### THEOREMA XLV.

269. *Si fuerint quatuor quantitates proportionales, factum extremarum aequale est facto mediarum.*

DEMONSTRATIO.

| | |
|---|---|
| 6 : 3 = 8 : 4 | A : B = C : D *per hypoth:* |
| 4 3 | & (§. 132) Ergo AB : BC |
| 24 = 24 | = CD : DC (§.159.) sed CD |

= DC (§.182.) igitur AD = BC (§.126.) *Q.e.d.*

### THEOREMA XLVI.

270. *Si fuerint tres quantitates continuè proportionales; factum extremarum est aequale quadrato mediae.*

DEMONSTRATIO.

| | |
|---|---|
| 2 : 4 = 4 : 8 | Quoniam A:B = B : C *per hy-* |
| 4 2 | *poth:* erit AC = BB (§. 269.) |
| 16 16 | sed BB est quadratum ipsius B |
| | (§.218.) |

(*b*) *Stiphelius in Arithm: l.* 2. *c.*12.*p.*134.

(§. 218.) Ergo factum extremarum AC æquale est quadrato mediæ *Q.e.d.*

## THEOREMA XLVII.

271. *Si factum aliquod ex duabus quantitatibus AD sit aequale alteri facto ex duabus aliis BC erunt factores reciprocè proportionales. hoc est:* A : B = C : D.

### DEMONSTRATIO.

AC : AD = C : D (§. 153.) sed AD = BC *per hypoth:* Ergo AC : BC = C : D (§. 152.) consequenter A : B = C : D (§. 141.) *Q.e.d.*

### COROLLARIUM.

272. Si itaqué in serie quatuor quantitatum factum ex secunda in tertiam æquale sit facto ex prima in quartam erunt quantitates istæ proportionales.

### SCHOLION.

273. *Sit Ex: gr:* 6 . 4 = 8 . 3, *facta ista octies in proportionem resolvi possunt, videlicet.*

| | | |
|---|---|---|
| 6 : 8 = 3 : 4 | | 8 : 6 = 4 : 3 |
| 6 : 3 = 8 : 4 | & | 8 : 4 = 6 : 3 |
| 4 : 8 = 3 : 6 | | 3 : 6 = 4 : 8 |
| 4 : 3 = 8 : 6 | | 3 : 4 = 6 : 8 |

## PROBLEMA XXVII.

274. *Inter duos numeros* 8 & 72 *medium proportionalem invenire.*

### RESOLUTIO.

I. Datorum unus 72 multiplicetur per alterum 8. (§. 97.)

II. Ex facto extrahatur radix quadrata 24; (§. 240.) erit hæc numerus quæsitus. (§. 270.)

## PROBLEMA XXVIII.

275. *Datis duobus numeris* 2 & 8 *invenire tertium proportionalem.*

### RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Siquidem *per hypoth:* 3 numeri proportionales esse debent,

debent, ſecundus datorum 8 ducatur in ſe ipſum, jam cum quadratum 64 æquale ſit facto extremorum (§. 270.) dividatur deinde 64 per primum 2, quotus 32 eſt numerus quæſitus (§. 184.) *Q.e.f.&d.*

## PROBLEMA XXIX.

276. *Datis tribus numeris* 3, 12, 5 *invenire quartum proportionalem.*

### RESOLUTIO.

I. Secundus 12 ducatur in tertium 5.

II. Factum 60. dividatur per primum 3. Quotus 20. eſt quartus numerus quæſitus.

### DEMONSTRATIO.

Quoniam *per hypoth:* quatuor numeri proportionales eſſe debent, factum ex ſecundo in tertium erit æquale facto ex primo in quartum (§. 269.) Quodſi ergo hoc factum per primum dividatur quotus eſt terminus quartus (§. 184.) *Q.e.d.*

### SCHOLION. I.

277. *Reſolutio hujus Problematis vulgò* Regula Trium *appellatur; quia ex tribus numeris invenitur quartus.* Uſus ejus ampliſſimus tam in vita communi, quam in ſcientiis. *Hinc* Regula aurea *vocatur. Facilè autem apparet hac Regulâ nullibi eſſe utendum, niſi numerorum datorum proportio interveniat. Ex: gr: Sit vas ingens aquâ repletum, quae per exiguum foramen effluat. Ponamus intra 2 minuta prima effluere tres ollas. Inveniri debet quanto tempore* 100 *ollae effluant. Tres in hoc caſu dantur numeri, quartus inveniendus. Enimvero vel ipſa experientia docet, aquam ſub initium celerius, poſtea tardius effluere: conſequenter quantitatem aquae effluentis non eſſe tempori proportionalem. Quare haec quaeſtio per regulam trium ſolvi non poteſt.*

COROL-

### COROLLARIUM.

278. Siquidem ut unum totum refertur ad ſuas partes ita aliud quodlibet totum poteſt referri ad ſuas partes. Denominatores verò fractionum ſunt tota. (§. 51.) Data quælibet fractio converti poteſt in aliam æqualem denominatoris dati.

Ex: gr: Sit fractio $\frac{2}{3}$ convertenda in aliam, cujus denominator 30, reperietur ea $\frac{20}{30}$ (§. 197.) ſcilicet per Problema præcedens. $3 : 2 = 30 : 20$

$$3\ )\ 60\ (\ 20 \qquad \begin{array}{r} 60 \\ 6 \\ \hline 00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 30 \\ 2 \\ \hline 60 \end{array}$$

### COROLLARIUM II.

279. Si ergo inveniendus valor fractionis alicujus, ex. gr: $\frac{2}{3}$ floreni quot æquivalent groſſis; Numerus partium, in quas integrum aliquod communi more dividitur pro denominatore ſumendus.

*Ita cum apud nos florenus unus in 30 groſſos dividatur, ex allato exemplo apparet 20 groſſos aequivalere duabus tertiis unius floreni. Sed ſiquidem unus cubitus dividitur in 24 digitos ſi fiat per coroll: praecedens* $3 : 2 = 24 : 16$; *fractio* $\frac{2}{3}$ *unius cubiti aequivalebit digitis* 16.

### COROLLARIUM III.

280. Si verò denominator aſſumitur 10, 100, 1000 &c. fractiones datæ in decimales convertuntur. *Ita*

*reperiemus* $\frac{2}{3} = \frac{6666}{10000}$ *&c. in infinitum.*
$\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$; $\frac{3}{7} = \frac{42857}{100000}$ *fere.*

SCHOLION II.

281. *In fractionibus decimalibus denominator omitti solet, quia ex meris cyphris & unitate praefixa constat, in ejus autem locum punctum ( . ) numeratori praefigitur, & loca vacua cyphrâ replentur ita ut una cyphra praeponatur, si fractionis numerator una nota & denominator* 100, *duae cyphrae praeponuntur, si fractionis denominator* 1000, *& numerator una nota; 3 cyphrae praeponuntur, si denominator* 10000 *& numerator una nota &c. Ex: gr: loco* $\frac{1}{100}$ *scribimus* 0.01; *locò* $\frac{1}{1000}$ *scribimus* 0.001 *loco* $\frac{1}{10000}$; 0.0001 *&c. similiter* $\frac{23}{100}$ *exprimuntur* 0.23; $5\frac{47}{1000}$; 5.0047, & $3\frac{23}{10000}$ *scribitur* 3.00023. *Facilè enim apparet cujusmodi sit, hoc est, an decima centesima aut millesima fractio? Multus harum fractionum in Mathesi usus, quas primus in condendis tabulis sinuum adhibuit Joannes Regiomontanus.*

SCHOLION III.

282. *Quae in commercium veniunt, pretiis suis proportionalia sunt; pro duplo enim mercis duplum, pro triplo triplum solvi debet. Datô itaquè pretio cujusdam mercis datae in quantitate aliqua ex: gr: in ponderibus mensuris &c. per regulam trium invenitur sive pretium quantitatis cujuscunquè alterius datae, sive quantitas mercis dato cuicunquè alteri pretio respondens. Ex: gr: pretium 3 librarum sunt 4 Thaleri*

*leri, quantum est pretium 17 librarum? Cum sit ut 3 librae ad 17 libras, ita illarum pretium ( 4 Thaleri) ad pretium harum, hoc quidem ita invenitur.*

$$3\text{L.} : 17\text{L} = 4\text{Th}: \quad 22\frac{2}{3}$$

```
 4      3)68(
 --      6
 68     --
         08
         --
          6
         --
          2
```

*Item 3 librae veneunt 4 Thaleris, quot $22\frac{2}{3}$ Thaleris? Cum sint ut 4 Thaleri ad $22\frac{2}{3}$, ita 3 librae ad quaesitas; harum numerus ita invenitur.*

$$4\text{ Th}: : 22\frac{2}{3}\text{T.} = 3\text{L.}$$

```
  3         4)68.(17
 --           4
 68          --
             28
             28
             --
```

*Hinc simul patet, quomodo Regula Trium examinetur, scilicet si factum extremorum divisum per unum numerum ex datis mediorum restituat alterum ex datis mediorum, operatio ritè peracta* ( §. 269; 184. )

SCHOLION. IV.

283. *Similiter merces operariorum est tempori proportionalis, quô laborant. Item quantitas laboris tempori aequaliter diviso ex: gr: in horas, dies &c. est proportionalis. ex: gr: intra duas horas 6 libri folia perleguntur: quanto horarum spatio 360 perlegi poterunt.*

$6\,F : 360\,F = 2\,H:$

```
  2        6) 720 ( 120
 720           6
              --
              12
              12
              --
              00
```

SCHOLION V.

284. *Si numeri dati fuerint heterogenei, non eandem proportionem habent, cum rebus ipſis reſpondentibus; ad homogeneos igitur reducendi. Ita Thaleri in florenos, floreni in groſſos, groſſi in ſolidos, librae in ſemuncias, horae in minuta &c. convertuntur. ex: gr: 3 librae & 4 ſemunciae veneunt 36 florenis & 14 groſſis, quanti librae 2 venient? quia libra una mercatorum conſtat ſemunciis ſive noſtro idiomate ma Łòtòw 32 calculus erit ejuſmodi*

$3\,L . 4\,S : 2\,L = 36\,Fl: 14\,gr:$

```
 32        32       30
 --        --     ----
 96        64     1080
  4                 14
---             ------
100     :  64 =   1094
                    64
                  ----
                  4376
                  6564
                 -----
        100 )    70016  ( 700 16/100 ſeu 4/25
                  7
                 --
                 00
```

Hoc eſt 100 S. : 64 S = 70016. gr. : 700 $\frac{4}{25}$ gr:
Inveniatur itaque valor florenorum

Scilicet 30) 700 ( 23 $\frac{10}{30}$ ſeu groſſ: 10.

```
          60
          ---
          100
           9
          ---
           1
```

*Si igi-*

*Si igitur 3 librae 4 femunciae veneunt 36 florenis & groffis 14, 2 librae venient 23 flor: & groff: 10 & praeterea unius groffi* $\frac{4}{25}$

SCHOLION VI.

285. *In fcriptis Arithmeticorum* Regula Trium inverfa *occurrit per quam* terminus datorum primus multiplicatur per fecundum, & factum dividitur per tertium; *contraria ratione qua in regula trium directa ufi fumus* (§. 276.) *quia fcilicet termini contra naturam proportionis ordinantur. Sed eâ opus non eft, fi numeri dati prout proportio exigit ordinentur. ex: gr:* 125 *Milites operi extruendo* 6 *menfes impendunt; quot milites requiruntur, ut idem opus intra* 2 *menfes conficiant. Evidens eft, quòt fit ut fpatium* 2 *menfium ad fpatium* 6 *menfium, ita numerus militum qui opus intra* 6 *menfes conficiunt ad numerum militum, qui idem opus intra* 2 *menfes conficiunt. Quo minore enim tempore conficitur opus, eo major militum numerus requiritur. En calculi typum;*

$$2 : 6 = 125 : 375.$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \hline 2\,)\ 750\ (375 \end{array}$$

SCHOLION. VII.

286. *Interdum iterata Regulae trium applicatione opus eft, antequam numerus quaefitus inveniatur, Ea vulgò pro peculiari Regula venditatur & ab aliis* Regula de 5, de 7. *ab aliis* Regula compofita *appellatur. Ex: gr:* 300 *Thaleri dant intra* 2 *annos ufuram* 42 *Thaleros (fi nimirum à* 100 *accipiantur* 7) *quantam ufuram dabunt* 2000 *Thalerorum per annos* 12. *Hic per Regulam trium invenitur quanta ufura à*

2000 *Thalerorum expectanda ſit intra* 2 *annos; deindè per eandem inquiritur quanta uſura intra* 12 *annos futura ſit.*

```
300 : 2000 = 42 :
          42
300)    84000   (280
        6
        24
        24
         0
2 : 12  =   280.
             12
             56
             28
       2)  3360   (1680
            2
            13
            12
             16
             16
              0
```

SCHOLION VIII.

287. *Exempla iſtiuſmodi per regulam trium ſemel applicatam ſolvi, poſſunt. Cùm enim in noſtro caſu bis* 300 *Thaleri eandem dent uſuram intra* 1 *annum, quam* 300 *intra duos, & duodecies* 2000 *tantam intra* 1 *annum, quantam* 2000 *intra* 12 *annos multiplicatis terminis prioribus per temporum circumſtantias ita inferatur:*

600 *Thaleri dant uſuram ( intra annum ſcilicet )* 42 *Thaleros, quantam dabunt duodecies* 2000, *ideſt* 24000 *Thaleri uſuram ( itidem intra annum* 1 )

600 *Th:*

600 *Th.* : 24000 *T* = 42 :

```
             42
           -----
           48000
           96
600)     -------  (1680
         1008000
         6
        -----
         40
         36
        -----
          48
          48
        -----
           0
```

*Si aliquando contingat terminos nonnullos contra naturam proportionis dari, fiat, quod faciendum* §. 285. *praescripsimus. Posterior haec methodus priori praefertur, quod in illa ad fractionum taedia saepe prolabamur.*

SCHOLION IX.

288. *Dantur & alii casus, in quibus iterata regula trium adhibenda. Ita si commune sociorum lucrum vel damnum inter eos distribuendum, toties applicatur, quot sunt socii, & inde speciali nomine appellatur* Regula Societatis.

*Est enim ut summa collatarum rerum ad lucrum vel damnum commune, ita collatum quodlibet partiale, ad lucrum vel damnum partiale ipsi respondens. Ex: gr: Lucrum commune trium personarum est* 2000 *Thalerorum, collatum* 1*mi* 1000 2*di* 500; *tertii* 300; *inveniri debent lucra partialia singulis convenientia. En typum calculi.*

| | | |
|---|---|---|
| *Collatum primi* | 1000 | *Thal:* |
| *Secundi* | 500 | |
| *Tertii* | 300 | |
| *Summa Collator:* | 1800 | |

1800 *Th*; : 1000 *Th* = 2000 *Th*.

2 000

1800 ) 2000000 ( 1111 $\frac{2}{18}$

18

20

18 *Lucrum primi.*

20

18

20

1800 *Th* : 500 *Th* = 2000

2 000

1800) 1000000 (555 $\frac{10}{18}$

90

100

90 *Lucrum ſecundi.*

100

90

10

1800 *Th* : 300 *Th*. = 2000

2 000

1800 ) 600000 ( 333 $\frac{6}{18}$

54

60

54 *Lucrum tertii*

60

54

6

*Examen.*

$1111 \frac{2}{18}$ *Lucrum primi.*

$555 \frac{10}{18}$ *Secundi.*

$333 \frac{6}{18}$ *Tertii.*

2000 *Th.* *Lucrum Commune.*

*Quodsi fuerint praeterea circumstantiae temporis, collata singula ducuntur in tempus sibi debitum ut* §. 287. *aut iteratur Regula Trium per* §. 286. *Ex: gr: Trium Personarum lucrum commune fuit* 9000 *Aureorum. Collatum primi* 100 *per menses* 16: *secundi* 140 *per menses* 10, *tertii* 300 *per menses* 7. *Quantum singulis debetur. Ductis collatis in tempora numerorum productorum* 1600,1400 *&* 2100 *Summa fit* 5100 : *erit proinde.*

*Summ: Coll: Coll: par:*

$$5100 : 1600 = 9000 : 2823 \frac{27}{51}$$

$$5100 : 1400 = 9000 : 2470 \frac{30}{51}$$

$$5100 : 2100 = 9000 : 3705 \frac{45}{51}$$

*Examen.*

$2823 \frac{27}{51}$ *Primi.*

$2470 \frac{30}{51}$ *Secundi.*

$3705 \frac{45}{51}$ *Tertii.*

9000 *Lucrum Commune.*

SCHOLION X.

289. *Sunt quaestiones aliae quae calculum eundem*

*dem requirunt, ut cùm in medicina aut artibus aliis ex data ratione, quam pondera miſcibilium inter ſe habent, inveniuntur pondera miſcibilium requiſita, ut mixtum aliquod integrum ſit ponderis dati. Ex: gr:* Tria ſimplicia compoſitionem alicujus medicamenti ingrediuntur doſis unius eſt 4 alterius 5 tertii 2 unciarum; inveniri debent doſes ſingulorum requiſitæ, ut pondus compoſiti ſit 8 librarum. *Calculi typus talis erit.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *Pondus* | *Primi.* | *Simplicis* | 4 | *unc:* |
| | *Secundi.* | | 5 | |
| | *Tertii,* | | 2 | |
| | | *Summa* | 11 | |

*Vi* §. 136. $\overset{unc.}{11} : \overset{Libr:}{8} = \overset{unc:}{4}$ *& quia Pharmacopaeorum libra* 12 *unciis conſtat ut ſint numeri homogenei* ( §. 284. )

$$11 : 8 = 4$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \hline 96 \\ 4 \\ \hline 384 \end{array} \quad 11\ (\ 384\ )\ 34\frac{10}{11} \qquad \begin{array}{r} 33 \\ \hline 54 \\ 44 \\ \hline 10 \end{array}$$

*Pondus ſimplicis primi.*

*Unc*     *Unc*

$$11 \quad 96 = 5$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \hline \end{array}$$

$$11\ (\ 480\ )\ 43\frac{7}{11} \qquad \begin{array}{r} 44 \\ \hline 40 \\ 33 \\ \hline 7 \end{array}$$

*Pondus ſimplicis ſecundi*

*Unc*

*Unc* *Unc*

11 : 96 = 2

2

11 ) 192 ( $17\frac{5}{11}$ *Pondus ſimplicis tertii.*

11

82

77

5

*Examen.*

*Pondus ſimplicis primi.* $34\frac{10}{11}$

*ſecundi.* $43\frac{7}{11}$

*tertii.* $17\frac{5}{11}$

*Pondus mixti.* 96 *Unc.* = 8 *Libris.*

SCHOLION. XI.

290. *Compendia faciendae Regulae Trium* Practicæ Italicæ *nuncupantur. Nimirum quoniam per regulam Trium ad tres numeros datos invenitur* 4*tus proportionalis* (§. 276.) primus & ſecundus (§. 157.) vel etiam primus & tertius (§. 160.) per eundem numerum ſi fieri poteſt exactè dividantur, & quoti in ipſorum loca ſubſtituantur, *ceu ex ſubſequente apparet exemplo.*

*Pretium* 3 *libr: eſt* 9 *Thal: quantum* 7 *libr:*

3 ) 1 : 3 = 7

3

*Facit* 21 *Thal:*

Item.

14 *L. eſt* 26 *Thal: quantum* 7 *Libr:*

7) 2 : 26 = 1

2 ) 26 ( 13 *Facit Thal:*

*Uti-*

*Utiliſſimae itaquè ſunt iſtae Practicae Italicae.*

SCHOLION XII.

291. *Sunt praeterea* Alligationis, Poſitionis ſimplicis & duplicis. *Cecis* ſeu Virginum *ſic dictae Regulae, ſed quoniam ſatis operoſo & prolixo calculo per Regulam Trium ſolvuntur, eas ope calculi Algebraici modò facillimo ſolvemus, uti & omnes alias quaſcunquè nodoſas Quaeſtiones.*

---

## CAPUT VII.

### *De Quantitatibus Æquidifferentibus.*

DEFINITIO LXI.

292. Si in ſerie trium quantitatum eadem fuerit differentia primæ & ſecundæ, quæ ſecundæ ac tertiæ; eæ quantitates *continuè æquidifferentes* appellantur. Si verò in ſerie quatuor quantitatum eadem fuerit differentia primæ & ſecundæ, quæ tertiæ ac quartæ, *diſcretim æquidifferentes* dicuntur. Ita 3, 6, 7, 10 ſunt numeri diſcretim æquidifferentes; 3, 6, 9 numeri continuè æquidifferentes.

SCHOLION.

293. *Dicuntur hae quantitates vulgò* Arithmeticæ proportionales, *ut diſtingvantur à proportionalibus geometricè, ſed minus propriè ſic dicuntur, nec ad mentem veterum.*

COROLLARIUM I.

294. S termini ſemper creſcunt, in continuè æquidifferentibus, terminus ſecundus eſt ſumma ex primo & differentia; terminus 3tius eſt ſumma ex ſecundo & differentia, quartus ſumma ex tertio & differentia & ita porro. Si termini in iiſdem continue æquidifferenti-

renti-

rentibus decreſcant, primus eſt ſumma ex ſecundo & differentia; ſecundus ſumma ex tertio & differentia, tertius ſumma ex quarto & differentia & ita porro.

COROLLARIUM II.

295. Similiter in diſcretim æquidifferentibus ſi termini creſcunt, ſecundus eſt ſumma ex primo & differentia, quartus ſumma ex tertio & differentia; ſi verò decreſcunt, primus eſt ſumma ex ſecundo & differentia, tertius ex quarto & differentia.

THEOREMA XLVIII.

296. *Si fuerint tres quantitates continuè aequidifferentes; ſumma primi & tertii eſt medii dupla.*

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{ccc} 4 & 7 & 10 \\ & 7 & 4 \\ \hline & 14 = 14 & \end{array}$$

Si enim termini creſcunt, ſecundus componitur ex primo & differentia, tertius ex ſecundo & differentia (§. 294.) adeoqué ex primo & differentia dupla. Quare ſi tertio addatur primus, conſtabit ſumma primi & tertii ex primo duplo & differentia dupla. Erit adeo ſecundi dupla. *Q.e.d.*

Eôdem modô Demonſtratio procedit, ſi termini decreſcunt.

Vel

*Si terminus primus ſit I. ſecundus II. tertius III. Differentia* D; *Demonſtratio ocularis erit iſtiuſmodi.*

| | |
|---|---|
| $I = I$ | §. 73. |
| $III = II + D$ | §. 294. |
| $III + I = II + I + D$ | §. 78. |
| & etiam | |
| $II = I + D$ | §. 294. |
| Ergo $III + I = II + II$ | §. 14. |
| hoc eſt $III + I = 2II$ | §. 86. |

THEOREMA XLIX.

297. *Si fuerint quatuor quantitates aequidifferentes, ſumma primi & quarti aequalis eſt ſummae ſecundi & tertii.*

DEMON-

DEMONSTRATIO

3 — 5 = 8 — 10
8 3
13 = 13

Si termini crefcunt, fecundus componitur ex primo & differentia, quartus ex tertio & differentia ( §. 294. ) Quare fi primus quarto addatur, aggregatum ex primo, tertio & differentia conftat. Si verò fecundum tertio addas, aggregatum ex primo differentia & tertio componitur. Sunt ergo aggregata inter fe æqualia ( §. 78. ) *Q. e. d.*

Eòdem modô demonftratur fi confequentes termini fuerint antecedentibus minores.

SCHOLION.

298. *Si terminus primus fit I, fecundus II, tertius III, quartus IV, differentia D; demonftratio etiam ocularis erit.*

II = I + D (§.294.) & IV = III + D( §. cit:)
III III (§. 78.) & I I (§.cit:)

II + III = III + I + D & IV + I = III + I + D.

hoc eft

II + III = IV + I. ( §. 77. )

PROBLEMA XXX.

299. *Inter duos numeros 9 & 13 medium aequidifferentem invenire.*

RESOLUTIO.

I. Addantur numeri dati 9 & 13

II. Summa 22 dividatur per 2.

Quotus 11 erit numerus quæfitus ( §. 296. )

PROBLEMA XXXI.

300. *Datis tribus numeris 8, 5, 9 quartum aequidifferentem invenire.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam fumma primi & quarti eft æqualis fummæ fecundi & tertii ( §. 297. )Ergo fi à fumma mediorum fubtrahatur primus erit refiduus quartus; itaqué

I. Nu-

I. Numerus ſecundus 5 addatur tertio 9
II. à ſumma 14 ſubtrahatur primus 8, Reſiduus 6 eſt quartus quæſitus (§. cit:)

COROLLARIUM.

301 Si datis tribus quæratur primus, à ſumma mediorum ſubtrahendus tertius. Si datis iiſdem quæratur medius, à ſumma extremorum ſubtrahendus medius. (§. 300. 297.)

SCHOLION.

302. *Quaeſtiones ſolvendae huc pertinentes cui animus fuerit in Algebra occurrent.*

---

# CAPUT VIII.

## De Logarithmis.

DEFINITIO LXII.

303. Series quantitatum juxta eandem rationem creſcentium vel decreſcentium vocatur *Progeſſio Geometrica.*

Ex: gr: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256
Vel 729, 243, 81, 27, 9, 3, 1.

DEFINITIO LXIII.

304. Series quantitatum ſecundum eandem differentiam creſcentium vel decreſcentium dicitur progreſſio Arithmetica Ex: gr: 3, 6, 9, 12, 15, 18. Vel 32, 28, 24, 20 &c.

DEFINITIO LXIV.

305. Si numeris in ratione Geometrica progredientibus ſubſcribantur totidem alii æquidifferentes, dicuntur hi illorum *Logarithmi* Ex: gr: Sint duæ progreſſiones:

Geom:

Geom: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512.
Arithm: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
erit 0 Logarithmus termini primi 1; 5 Logarithmus ſexti 32, 7 Logarithmus octavi 128.

*Definitio eſt Genetica, erit verò nominalis*, ſi dicantur Logarithmi termini progreſſionis Arithmeticæ reſpondentes terminis progreſſionis Geometricæ.

COROLLARIUM I.

306. Si progreſſio Arithmetica fuerit ſeries numerorum naturalium, & à cyphra incipiat, ut in exemplo allato; Logarithmi deſignant diſtantias numerorum proportionalium ab unitate; ex: gr: Logarithmus 5 reſpondens 32 deſignat terminum hunc eſſe quintum ab unitate.

COROLLARIUM II.

307. Quoniam in progreſſione Geometrica ab unitate incipiente termini ſint dignitates ordine naturali progredientes ( §. 222. 303. ) Si progreſſio Arithmetica eadem ſit quæ in exemplo allato, logarithmi ſunt exponentes dignitatum ( §. 223. ) Ex: gr: 2 eſt dignitas prima ejuſqué exponens 1; 64 dignitas ſexta, ejuſqué exponens 6.

DEFINITIO LXV.

308. Si progreſſioni Geometricæ ab unitate incipienti & in ratione decupla creſcenti ſubſcribantur totidem alii à zero incipientes numeri naturales progreſſionis Arithmeticæ, dicuntur hi *Characteriſticæ* Logarithmorum. Ex: gr: Sint duæ Progeſſiones:

Geom:

Geom: 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000.
Arithm: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

0, 1, 2, 3, 4, &c. ſunt characteriſticæ Logarithmorum.

### SCHOLION.

309. *Definitur ita Characteriſtica per ordinem ad ſeries progreſſionum Geometricae & Arithmeticae ad condendum Canonem Logarithmorum aſſumptas.*

### COROLLARIUM. I.

310. Quævis itaqué Characteriſtica eſt Logarithmus non tamen è contra. ( §. 305. )

### COROLLARIUM. II.

311. Cum utraqué ſeries in infinitum continuari poſſit. ( §. 42. ) adeoqué quilibet numerus naturalis termino cuilibet Progreſſionis Geometricæ reſpondere. ( §. 308. ) quilibet numerus poteſt eſſe characteriſtica Logarithmorum. ( §. cit: )

### COROLLARIUM III.

312. Characteriſtica igitur Logarithmorum pro numeris ab 1 ad 10, eſt 0. pro numeris à 10 ad 100, eſt 1, pro numeris à 100 ad mille eſt 2 &c. hoc eſt præter zerum, characteriſtica quælibet pro numeris tot habet unitates, quot numerus eidem reſpondens notas, demptâ unâ. ( §. 308. ) Si verò integrum aliquod præter notam primam finiſtimam reliquis zeris conſtet, tot characteriſtica habebit unitates, quot numerus integer zeros. ( §. cit: ) *Ex: gr: Characteriſtica* 3 *eſt numeri* 1000; *ſi à* 1000 *dematur una nota-reſiduae notae tres* 000 *reſpondent unitatibus characteriſticae tribus.*

## THEOREMA L.

313. *Si Logarithmus unitatis ſit* 0, *erit Logarithmus facti ſumma ex Logarithmis factorum.*

DEMONSTRATIO.

In multiplicatione eſt ut unitas ad factorem unum, ita factor alter ad factum (§. 58.) Quare ſi ſubſcribantur totidem reſpondentes numeris Logarithmi, erit Logarithmus facti æquidifferentium quartus ad Logarithmum unitatis & Logarithmos factorum(§.305.) adeoqué differentia inter Logarithmum unitatis, & ſummam Logarithmorum factorum (§. 300.); ſed Logarithmus unitatis eſt o *per hypoth:*

Ergo Logarithmus facti eſt ſumma ex Logarithmis factorum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM. I.

314. Cùm factores quadrati ſint inter ſe æquales, hoc eſt quadratum ſit factum ex radice in ſe ipſam. (§. 218.) Logarithmus Quadrati eſt duplus Logarithmi radicis. (§. 403.)

COROLLARIUM II.

315. Eôdem modô patet Logarithmum cubi eſſe triplum (§. 220 313.) Biquadrati quadruplum, potentiæ 5tæ quintuplum, 6tæ ſextuplum &c. Logarithmi radicis: & in genere cujuſqué Potentiæ tantuplum Logarithmum eſſe Logarithmi radicis, ſive toties multiplicatum quota eſt numero ipſa Potentia.

*Ita quoniam quadratum eſt 2da potentia,* bis *debet poni Logarithmus radicis, ut prodeat Logarithmus 2dae potentiae, quoniam cubus eſt tertia potentia, logarithmus radicis ter debet poni, ut prodeat logarithmus cubi &c.* (§. 222. 313.)

COROLLARIUM III.

316. Quoniam verò Potentiæ per exponentes diſtingvuntur (§. 223. 224.) adeoqué exponens potentiæ tot habet unitates, quota eſt numero ipſa potentia (§. 225.) prodibit etiam Logarithmus potentiæ, ſi Logarithmum radicis toties ponas, quot habet unitates exponens potentiæ; hoc eſt ſi Logarith-

mum

mum radicis multiplices per exponentem potentiæ. (§. 58.) *Ita quoniam cubi est exponens 3, si Logarithmus radicis multiplicetur per 3 prodibit Logarithmus cubi; triplus utiqué Logarithmi radicis.* (§. 315. 58.)

COROLLARIUM IV.

317. Quoniam deniqué ejusmodi Logarithmi sunt exponentes dignitatum (§. 307.); si exponens radicis ducatur in exponentem potentiæ prodibit Logarithmus sive exponens desideratæ potentiæ; adeoqué

COROLLARIUM V.

318. Cùm eôdem modô quô componitur solvatur potentia, si dignitatis exponens dividatur per exponentem alterius potentiæ, prodibit quotus exponens râdicis istius alterius potentiæ. (§. 184.) Ita quoniam cubi est exponens 3, si exponens potentiæ 6tæ 6 dividatur per 3 quotus 2 est exponens radicis cubicæ. Similiter quoniam potentiæ quartæ est exponens 4, si 4 dividatur per 2 exponentem potentiæ secundæ, prodibit 2 exponens radicis dignitatis secundæ (§, cit:) consequenter exponens radicis est subduplus, subtriplus, subquadruplus &c. exponentis potentiæ. (§. 315.)

COROLLARIUM VI.

319. Si igitur exponentem radicis quadratæ velis, divide exponentem potentiæ datæ per 2. si radicis cubicæ per 3: si biquadrati, exponens potentiæ per 4 dividendus &c. (§. 318.)

SCHOLION.

320. *Ex: gr: 3 summa Logarithmorum* 1 *&* 2 *est Logarithmus facti* 8, *ex* 2 *in* 4. *Similiter* 7 *summa Logarithmorum* 2 *&* 5 *est Logarithmus facti* 128 *ex* 4 *in* 32. (§. 313.)

*Porro* 2 *logarithmus quadrati* 4 *est duplus logarithmi radicis* 2. *Item* 3 *Logarithmus cubi* 8 *est tri-*

*plus logarithmi radicis 2 &c.* ( §. 314. 315. ) *Tandem Potentiae tertiae 64 exponens 6 est factum ex exponente 2 radicis 4 in exponentem 3 potentiae tertiae. Item potentiae quartae 256 exponens 8 est factum ex exponente 2 radicis 4 in exponentem 4 potentiae quartae.* ( §. 317. ) *Denique potentiae 64 exponens 6 divisus per 3 exponentem potentiae tertiae hoc est 6 : 3 = 2 est exponens radicis cubicae 4 de potentia tertia.*

*Item potentiae 256 exponens 8 divisus per 4 exponentem potentiae quartae sive 8 : 4 = 2 est exponens radicis biquadratae 4 de potentia dicta 256 quarta.* ( §. 318. )

*Quod ultimum est quadrati 64 é radice 8 exponens 6 divisus per 2 dat exponentem 3 radicis quadratae 8, ejusdem cubi 64 exponens 6 divisus per 3 dat exponentem 2 radicis cubicae 4* ( §. 319. )

THEOREMA LI.

321. *Si Logarithmus unitatis est 0, erit Logarithmus quoti differentia inter Logarithmos divisoris & dividendi.*

DEMONSTRATIO.

Est enim ut divisor ad dividendum, ita unitas ad quotum ( §. 61. ) Quare si subscribantur totidem respondentes numeris Logarithmi, erit Logarithmus quoti æquidifferentium quartus ad Logarithmos divisoris, dividendi atqué Logarithmum unitatis(§. 305.) adeoqué differentia inter Logarithmum divisoris & summam logarithmorum dividendi & unitatis(§. 300.) sed logarithmus unitatis est 0 *per hypoth:* Ergo logarithmus quoti est differentia inter logarithmos divisoris & dividendi. *Q.e.d.*

SCHOLION. I.

322. *Admirandum istud sub initium saeculi superioris logarithmorum inventum debetur Clarissimo Joanni*

*anni Nepero Baroni Merchestonii è Scotia oriundo: quó numerorum multiplicatio mutatur in additionem- Divisio in Subtractionem, elevatio ad potentias in multiplicationem. Extractio radicum in divisionem. Si enim habeamus omnibus numeris respondentes logarithmos, logarithmi additi indicabunt factum ( §. 313. ) subtracti quotum ( §. 321. ) multiplicati numerum elevatum ad potentiam ( §. 317. ) & unus divisus per alium desideratam indicabit radicem ( §. 318. ) Ex: gr: Si numerus 4 debet elevari ad cubum logarithmus ejus 2 triplicatus 6 indicat numerum 64 cubum dati numeri 4 ( §. 315. ) & è contra si radix cubica de 64 sit extrahenda logarithmus quoti 2 ex divisione logarithmi 6 per logarithmum cubi 3 indicabit numerum 4 radicem cubicam ipsius 64. dignum scitu itaqué quomodo sunt inventi; proinde sit.*

## PROBLEMA XXXI.

323. *Numeri cujuscunqué logarithmum invenire, & canonem logarithmorum pro numeris naturalibùs construere.*

### RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam logarithmi sunt termini progressionis Arithmeticæ respondentes terminis progressionis Geometricæ ( §. 305. ) quævis progressio Geometrica, & illi respondens quævis Arithmetica assumi potest. Si assumatur itaqué progressio Geometrica in ratione decupla crescens & Arithmetica à zero incipiens. Ex: gr:

Geom: 1, 10, 100, 1000, 10000 100000.
Arithm: 0. 1. 2. 3, 4. 5.

Erunt 0, 1, 2, 3, 4, &c. logarithmi numerorum 1, 10, 100, 1000, &c. Inter 1 verò & 10, item inter 10, & 100, inter 100 & 1000 &c. ut inveniantur logarithmi, debent primo inveniri numeri medii proportionales. Quoniam verò medii isti proportionales

inter 1 & 10 inter 10 & 100 exacti non dantur in integris, nec dabuntur etiam eorum logarithmi (§.cit:) in integris ſed in fractis, ut igitur in fractis decimalibus quam proximi integris reperiantur tum medii geometricè proportionales, tum reſpondentes illis logarithmi, aſſumatur progreſſio
Geom: 1. 0000000, 10. 0000000, 100. 0000000
Arithm: 0.00000000, 1. 00000000, 2. 00000000
( §. 271. ) ut defectus ſive error unà millioneſima minor evadat, adeoqué quo ad uſum accurati ſint, atqué integris æquivaleant. Quod ſi igitur inter 1. 0000000 & 10.0000000. Item inter 10. 0000000, 100.0000000 &c. quærantur medii Geometricè proportionales omnes ( §. 274. ) atqué etiam inter 0. 00000000 & 1. 00000000. Item inter 1. 00000000 & 2. 000 &c. medii æquidifferentes omnes ( §. 299. ) reſpondebunt hi ſinguli ſingulis terminis progreſſionis Geometricæ ab 1 ad 10, à 10 ad 100, à 100 ad 1000 &c. hoc eſt numeris datis naturalibus, adeoqué eorum erunt logarithmi. ( §. 305. ) *Q.e. f. & d.*

SCHOLION I.

324. *Ex: gr: Sit inveniendus logarithmus numeri 9, inter* 1. 0000000 *(A) &* 10. 0000000 *(B) quaeratur medius proportionalis ( C ) ( §, 274. ) & inter eorum logarithmos* 0. 00000000 *atqué* 1.00000000 *medius aequidifferens ( §. 299. ) qui erit logarithmus ipſius C ( §. 305. ) hoc eſt numeri ternarium ſuperantis* $\frac{1622777}{10000000}$ *adeoqué à novenario multum diſtantis. Quaeratur inter B & C alius medius proportionalis D, qui ad novenarium propius accedit, & inter B, & D adhuc alius E, & ita porro alii inter numeros novenariò proximè majores & minores, donec tandem repetitò vigeſies ſexies calculo inveniatur*

$9\frac{0000000}{10000000}$ ( §. 280. ) *qui cùm à novenario ne unica quidem particulâ millionesimâ differat; ejus logarithmus citra errandi periculum pro logarithmo novenarii habeatur. Quaerantur itaqué in quolibet casu logarithmi mediorum proportionalium, & ita habebitur tandem logarithmus novenarii prope verus.* 0. 95424251.

*Si eôdem modô inter A & C numeros medios proportionales quaeras, & convenientes logarithmos singulis assignes, invenietur tandem logarithmus numeri* 2, *& ita porro*

| | Numeri medii Proportionales | Logarithmi |
|---|---|---|
| A | 1. 0000000 | 0. 00000000 |
| C | 3. 1622777 | 0. 50000000 |
| B | 10. 0000000 | 1. 00000000 |
| B | 10. 0000000 | 1. 00000000 |
| D | 5. 6234132 | 0. 75000000 |
| C | 3. 1622777 | 0. 50000000 |
| B | 10. 0000000 | 1. 00000000 |
| E | 7. 4989421 | 0. 87500000 |
| D | 5. 6234132 | 0. 75000000 |
| | &c. &c. | &c. &c. |
| | Finis | Calculi. |
| | 9. 0000004 | 0. 95424253 |
| | 9. 0000000 | 0. 95424251 |
| | 8. 9999998 | 0. 95424250 |

COROLLARIUM I.

325. Non eſt tamen opus, ut omnium numerorum logarithmi tanto labore inveſtigentur, numeri enim compoſiti per alios dividi poſſunt. (§. 68.) adeoque eorum logarithmi invenientur per (§. 322.) & cum etiam inter ſe multiplicari poſſint, eorum logarithmi invenientur per §. 313. & ſequ: *Ex: gr: datis logarithmis numerorum* 1, 2, 7, 9, 10. *reliquorum intermediorum numerorum logarithmi facilè inveniuntur. Nam logarithmus numeri* 9 *biſectus dat logarithmum* 0. 4771212 5 *numeri* 3 (§. 314.); 10 : 2 = 5, *ideoque ſi à logarithmo denarii ſubtrahatur logarithmus binarii, prodibit logarithmus quinarii ſive* 5. (§.322.) *quia* 2 . 3 = 6 . *Logarithmus numeri* 6 *prodit additis logarithmis numerorum* 2 *&* 3, *ſimiliter quoniam* 2 . 4 = 8 *logarithmus* 8 *habetur ſi addantur logarithmi ipſorum* 2 *&* 4 *ipſius verò* 4 *ſi addantur logarithmi* 2 *&* 2.

SCHOLION II.

326. *Canonem logarithmorum pro numeris naturalibus ab* 1 *uſque ad* 20000 *& à* 9000 *ad* 100000 *primus conſtruxit Henricus Briggius Profeſſor Geometriae Savilianus in Academia Oxonienſi ex conſilio tamen primi inventoris Neperi. Lacunam inter* 20000 *&* 90000 *mox explevit Adrianus Vlaccus. In libellis vulgaribus habetur tantùm canon logarithmorum pro numeris ab* 1 *uſque ad* 10000.

COROLLARIUM II.

327. Cùm logarithmi ſint fractiones decimales (§. 323. 281.) decupla verò decimalium ſint denominatores (§. 281.) hoc eſt integra (§. 51.), decuplis logarithmorum ſola eorum integra augebantur (§.210) ſed eorum integra ſunt characteriſticæ (§.308.323.) decuplis igitur logarithmorum ſolæ non niſi characteriſticæ augebuntur: *hoc eſt logarithmi decuplorum*

*iidem*

*iidem ſunt exceptâ characteriſticâ.*

## PROBLEMA XXXII.

328. *Invenire logarithmum pro numeris majoribus, quam in canone continentur.*

### RESOLUTIO.

I. Reſecentur 4 notæ ad ſiniſtram numeri dati, & earum ex canone excerpatur logarithmus.

II. Characteriſticæ tot addantur unitates, quot notæ ad dextram reſiduæ.

III. Logarithmus inventus ſubtrahatur à majori proximè ſequente in canone.

IV. Inferatur: ut differentia numerorum in canone evolutorum ad differentiam tabularem logarithmorum ipſis reſpondentium, ita notæ reſiduæ numeri dati ad differentiam logarithmicam per Problema XXIX §. 276. inveniendam.

V. Addatur hæc logarithmo prius invento minori, ſumma erit logarithmus quæſitus.

*Ex: gr: Quaeratur logarithmus numeri* 92375. *Reſeca* 4 *notas* 9237 *& his notis reſpondentis logarithmi* 3 . 9655309 *characteriſticam auge unitate.*

*Hinc è Logarithmo numeri*

9238 = 3 . 9655780 *ſubduc*

*logar: num:* 9237 = 3 . 9655309 *relinquitur dif-*

*ferentia Tabularis* - - - 471.

*Inferatur:* 10 : 471 = 5

5 — 2 : 471 : 1 : 235

| | |
|---|---|
| *Jam minori logarithmo* | 4 . 9655309 |
| *addatur differentia inventa* | 235. |
| *Summa eſt log: quaeſitus* | 4 . 9655544 |

### DEMONSTRATIO.

Quoniam canon logarithmorum poſita progreſſione Geometrica decupla ab unitate & Arithmeticâ

nume-

numerorum naturalium à zero incipiente conſtructus ſit (§. 323.) iidem erunt logarithmi decuplorum & in noſtro caſu numerorum 9238, 9237, qui & 92380, 92370 exceptâ characteriſticâ (§. 327.) Porro cùm *per operationem* characteriſtica in noſtro caſu unitate augetur eò ipſo numeri propoſiti decuplum ſumitur (§. 312.) hoc eſt qui fuit 9238 erit 92380, & qui fuit 9237. erit 92370; conſequenter cùm *per eandem operationem* differentia logarithmorum ipſis reſpondentium inquiritur, decuplorum logarithmorum differentia obtinetur (§. 324.) Sed ſiquidem datus numerus 92375 nequé ſit decuplum numeri 9238, nam eſt minor 92380, nequé etiam decuplum numeri 9237, nam eſt major 92370; Eſt igitur medius inter decupla iſta, atqué adeo & logarithmus ejus eſt medius inter logarithmos decuplorum (§. 305.) Hinc tandem quoniam differentiæ decuplorum 10 reſpondet differentia logarithmorum 471 addenda logarithmo minori, ut prodeat logarithmus decupli (§. 294.), differentiæ medii à decuplo, ſive notæ 5 reſectæ reſpondebit differentia logarithmorum 235 addenda eidem logarithmo decuplorum minori ut prodeat logarithmus medius decuplorum (276. 294.) hoc eſt logarithmus numeri quæſiti 92375 (§. 305.) *Q.e.d.*

*Expoſitione utimur in demonſtrando ut non nihil difficilioribus claritatis affulgeat.*

COROLLARIUM I.

329. Quoniam eadem demonſtratio de centuplis millecuplis etiam procedat; ſi duæ notæ ad dextram reſectæ reſiduæ maneant, erit differentia centuplorum ad differentiam logarithmorum centuplorum vel ſi tres notæ reſiduæ ad dexteram, erit differentia millecuplorum ad differentiam logarithmorum millecuplorum addendam logarithmo minori ut prodeat logarithmus millecuplus (§. 294.) ſicut differentia medii

medii à millecuplo, ſive notæ tres reſiduæ ad differentiam logarithmorum millecuplorum addendam logarithmo millecuplorum minori ut prodeat logarithmus medius inter millecuplos (§. 276. 294.) hoc eſt ſi nota ad dexteram reſecta 1. ſumatur regulæ trium terminus primus 10 ſi duæ 100, ſi tres 1000. Sed

COROLLARIUM II.

330. Siquidem differentiæ numerorum differentiis logarithmorum proportionales non ſint, (§. 126. 277.) creſcente vero factore uno mediorum factum, conſequenter quartus proportionalium creſcere debet (§. 58. 276.) ne error qui jam per ſuperiora in millioneſimis vitari non potuit (§. 277.) ſenſibilior evadat, hoc modô inquiri poſſunt logarithmi numerorum notis 7. tantum reſpondentes.

SCHOLION.

331. *Nihilominus tamen in noſtro caſu adeò exactum logarithmum reperimus (§. 328.) ut accuratior in tabulis majoribus Brigii non occurrat.*

PROBLEMA XXXIII.

332. *Invenire logarithmum fractionis propriae, hoc eſt cujus numerator minor eſt denominatore.*

RESOLUTIO.

I. Logarthhmus numeratoris ſubtrahatur à logarithmo denominatoris.

II. Reſiduo præfigatur ſignum ſubtractionis —

Ex:gr: Quærendus eſt logarithmus fractionis, $\frac{3}{7}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| Logarithmus | 7 | = | 0. 8450980 |
| Logarithmus | 3 | = | 0. 4771213. |
| Logarithm: | $\frac{3}{7}$ | = | —0.3679767. |

DEMONSTRATIO.

Cùm fractio ſit quotus ex diviſione numeratoris

per

per denominatorem emergens ( §. 63. ) logarithmus ejus eſt differentia logarithmorum numeratoris ac denominatoris ( §. 321. ) adeoqué ſi numerator minor denominatore, major logarithmus è minore ſubtrahendus, quo in caſu differentia evadit negativa ( §. 92. ) *Q.e.d.*

SCHOLION.

333. *Nec mirum eſt fractionis propriae logarithmum eſſe negativum. Fractio enim eſt minor unitate* ( §. 193. ) *Sed unitatis logarithmus eſt* 0 ( §. 323. ) *ergo logarithmus fractionis eſt nihilo minor.*

COROLLARIUM I.

334. Cùm in fractione ſpuria $\frac{9}{5}$ numerator ſit major denominatore; ejus logarithmus habetur, ſi logarithmus denominatoris â logarithmo numeratoris ſubtrahatur. ( §. 63. 321. )

Logarithmus $9 = 0.9542425$
Logarithmus $5 = 0.6989700$

$\frac{9}{5} = 0.2552725$

COROLLARIUM II.

335. Quoniam integra cum adhærente fractione $3\frac{2}{7}$ ad fractionem ſpuriam $\frac{23}{7}$ reduci poſſunt. (§.196.)eôdem modô invenientur eorum logarithmi

Logarithmus $23 = 1.3617278$
Logarithmus $7 = 0.8450980$

Logarithmus $3\frac{2}{7} = 0.5166298.$

PROBLEMA XXXIV.

336. *Invenire numerum logarithmo reſpondentem, qui in tabulis accuratus non invenitur.*

Imò

RESOLUTIO.

*1mo.* Si logarithmi ( qui convenit numero ) characteriſtica fuerit 3 ( §. 312. )

I. Logarithmus proximè minor dato ſubtrahatur à proximè majori, itidemqué à logarithmo dato.

II. Inferatur ut differentia prior ad 10, vel 100, vel 1000 ita differentia 2da ad partes decimas, centeſimas milleſimas per Problema XXIX. §. 276.

III. Addatur differentia inventa ei numero, qui logarithmo proximè minori in tabulis reſpondet, ſic habebitur numerus prope verus, cui logarithmus datus convenit.

*Ex: gr: Quaeratur numerus reſpondens logarithmo* 3 · 7589982.

| | |
|---|---|
| *Logarithmus proximè major.* | 3 · 7589982 |
| *Logarithmus proximè minor.* | 3 · 5589875. |
| *Differentia 1ma* | 757. |
| *Logarithmus datus* — | 3 · 7589982. |
| *proximè minor* | 3 · 5589875. |
| *Differentia 2da.* | 107 |

757 : 100 = 107 : 14

*Cùm numerus logarithmo minori conveniens ſit* 5741, *quaeſitus erit* $5741 \frac{14}{100}$

*2dô.* Si logarithmi dati characteriſtica fuerit 0, 1, vel 2

I. Excerpatur numerus reſpondens logarithmo proximè minori datô.

II. Characteriſtica mutetur in 2, vel 3; ſic mutatâ.

III. Quæratur in majore ordine decimali logarithmus proximè, minor dato; qui eidem reſpondet numerus habebit numeratorem fractionis decimalis tot notarum, quot notæ reliquæ reſiduæ ſunt ab integris.

*Ex:gr: Quaeratur numerus logarithmo* 1.9201662 *reſpon-*

*respondens. Cum in tabulis proxime minori istô respondeat numerus 83 integra, characteristica in 3 mutatâ, logarithmo 3. 9201233 proximè minori datô majoris ordinis decimalis respondet numerus 8320; est itaqué quaesitus* 83 $\frac{20}{100}$ *Quod si fractionibus his non fueris contentus, minores istis per casum primum inveniri possunt.*

DEMONSTRATIO.

Cùm logarithmi in partibus millionesimis integris accuratè respondeant ( §. 323. ), datô *per hypoth:* non accuratô logarithmô, numerus quoqué non accuratus sed cum fractione aliqua respondebit ( §. citat: 305. ) consequenter ut logarithmus datus inter logarithmos minorem & majorem, ita numerus eidem respondens inter unum atqué alium proximè integrum majorem numerum erit medius ( §. 305. 324. ) Si itaqué inferatur ut differentia logarithmorum integrorum ad numerum sibi respondentem, hoc est ad unum integrum in aliquot partes divisum, ita differentia partium logarithmicarum ab integro logarithmo ad partes unius numeri integri sibi debitas addendas numero qui respondet logarithmo minori ( §. 276.) habebitur numerus propè verus respondens logarithmo dato ( §. 327. 305. ) *Q.e.primum.*

Quoniam *per hypoth:* logarithmo proximè minori dato numerus integer respondens sumitur, & characteristica logarithmi mutatur, tot zeri accedunt integro numero, quot characteristicæ unitates accessêre ( §. 312. ) adeoqué dictus numerus per tot zeros cum præfixa unitate multiplicatus ( §. 98. ) Quodsi jam ii zeri cum præfixa unitate sumantur pro denominatore fractionis quæsitæ, quæ per n. 1. logarithmo non accurato respondet omnino, multiplicabitur numerus integer per denominatorem ( §. cit: ) adeoqué reducetur ad

cetur ad fractum ( §. 196. ) consequenter istæ notæ ab integris residuæ cum in loco zerorum, hoc est numeratoris *per demonstrata* sint, erunt numerator fractionis quæsitæ (§. 206. 281.) *Q. e. alterum.*

C O R O L L A R I U M.

337. Cùm per demonstrata integris manentibus solæ fractiones in majore ordine decimali augeantur, idqué ordine naturali, si sumatur logarithmus mùtata characteristica proximè major datô, sumetur fractio major verâ quam proximè. Denominator verò præter unitatem tot zerorum erit, quot characteristicæ unitates accessêre ( §. 336. 312. ) *adeoqué si characteristica unâ notâ aucta, fractio erit in decimis, si 2, in centesimis, si 3, in millesimis.*

S C H O L I O N.

338. *Si habeatur canon magnus Brigii ad manus, ubi characteristica* 5, ( §. 326. ) *datô logarithmô non accurato cum characteristica* 3 *imò* 4 *possunt fractiones inveniri modo posteriori.*

PROBLEMA XXXV.

339. *Invenire numerum convenientem logarithmo majori iis qui in tabulis continentur.*

R E S O L U T I O.

I. A logarithmo dato subtrahatur logarithmus numeri 10, vel 100, vel 1000, vel 10000 donec relinquatur logarithmus ultimô tabulæ minor.

II. Quæratur numerus ei respondens (§. 326.) &

III. Multiplicetur per 10, vel 100, vel 1000, vel 10000. Factum est numerus quæsitus.

*Ex: gr: Quaerendus est numerus logarithmi* 7.7589982; *subtrahatur logarithmus numeri* 10000, *qui est* 4. 0000000, *ut relinquatur* 3. 7589982, *cui respondet numerus* $5741\,\frac{14}{100}$, *ducatur in* 10000. *factum* 57411400 *erit numerus quaesitus.*

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Dum *per hypoth:* logarithmus unus ex altero ſubtrahitur, iis reſpondens numerus unus per alterum dividitur ( §. 321. 322. ) quodſi adeo ponamus logarithmo majori reſpondentem numerum ignotum X, logarithmo minori A, differentiæ logarithmorum numerorum reſpondentem L, differentiam autem ipſam logarithmorum dicamus D, reſpondebit huic differentiæ D numerus X : A = L ( §. cit: ) multiplicetur jam utrumqué *ex hypoth:* per A, erit X = AL ( §. 83. 60. ); ſed cùm numeri multiplicantur, logarithmi iis reſpondentes addunτur ( §. 313. 322. ) Si itaqué logarithmus datus major ſit M, minor N, reſpondebit factum numerorum AL ſummæ logarithmorum N+D (§§. cit: ) adeoqué ipſi M ( §. 294. ) hoc eſt numerus inventus dato logarithmo majori. *Q.e.d.*

SCHOLION.

340. *Facilè apparet ſubtrahi poſſe logarithmum numeri cujuſcunqué in tabula occurrentis, modò per eundem numerum multiplicetur, qui logarithmo reſiduo reſpondet. Sed operatio taedioſa evadit.*

PROBLEMA XXXVI.

341. *Invenire numerum dato logarithmo defectivo reſpondentem.*

RESOLUTIO.

I. Dato logarithmo defectivo addatur logarithmus ultimus tabulæ ſive numeri 10000, hoc eſt ille ab hoc ſubtrahatur. Nam additio negativi ad poſitivum eſt deſtructio poſitivi negativo æqualis & è contra

II. Logarithmo reſiduo conveniens numerus quæratur ( §. 336. )

Dico hunc eſſe numeratorem fractionis, cujus denominator eſt 10000.

Ex: gr: Quæratur fractio reſpondens logarithmo defectivo

defectivo 0.3679767. Hic
ex 4.0000000. subductus
relinquit 3.6320233. cui convenit numerus
$4285 \frac{71}{100}$ ( §. 336. ) est ergo fractio quæsita
$\frac{428571}{1000000}$ ( §. 207. )

D E M O N S T R A T I O.

Cùm fractio sit quotus ex divisione numeratoris per denominatorem emergens ( §. 63. ) erit unitas ad fractionem, ut denominator ad numeratorem (§.61) Itaqué ut unitas ad fractionem dato logarithmo defectivo respondentem, ita 10000 ad numerum logarithmo residuo convenientem ( §. 313. ) Ergo si 10000 sumatur pro denominatore, erit numerus iste numerator fractionis quæsitæ ( §. 280. ) *Q.e.d.*

P R O B L E M A XXXVII.

342. *Datis tribus numeris invenire quartum proportionalem.*

R E S O L U T I O.

I. Logarithmus secundi addatur logarithmo tertii.

II. A summa subtrahatur logarithmus primi. Residuus est logarithmus quarti quæsiti ( §. 276.322.)

Ex: gr: Sint numeri dati 4, 68, 3.

Logar: 68 = 1.8325089
Logar: 3 = 0.4771213
Summa = 2.3096302
Logar: 4 = 0.6020600
Logar: quæs: = 1.7075702

Cui in tabulis respondet numerus 51.

S C H O L I O N.

343. *Problematis hujus usus praestantissimus in Trigonometria elucet. Tyrones hanc de*

*logarithmis doctrinam tantisper seponant donec Trigonometriae operam dederint:*

---

# CAPUT IX.

## *De Fractionibus Decimalibus.*

### DEFINITIO LXVI.

344. Fractio decimalis est, cujus denominator est articulus quidam primarius 10, 100, 1000, 10000, &c. ( §. 280. )

### COROLLARIUM.

345. Progrediuntur adeo denominatores in ratione decupla. ( §. 120. )

Ex: gr: Si fuerit fractio decimalis $\frac{342857}{100000}$, eadem æquivalet huic seriei:

$\frac{3}{1} + \frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{7}{100000}$ nam $\frac{4}{10} = \frac{40000}{100000} = \& \frac{2}{100} = \frac{2000}{100000}$ &c. (§. 199.)

*Cujus seriei denominatores* 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 in ratione decupla progrediuntur.

### COROLLARIUM II.

346. Quoniam logarithmi progressionis Geometricæ 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 sunt 0, 1, 2, 3, 4, 5. ( §. 323. )

In fractionibus verò decimalibus denominatores sunt dicta progressio ( §. 344. ) cui logarithmi isti constanter respondent, denominatorum in locum logarithmi eorum commodè substitui possunt. Si itaque fractiones decimales sub forma numerorum integrorum scribantur, veluti in nostro casu loco $\frac{342857}{100000}$ aut

+ 4

$+\frac{4}{10}+\frac{2}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{5}{10000}+\frac{7}{100000}$ ſcribatur 3 . 42857. ( §. 281. ) locò denominatorum numeratoribus ſolitariè poſitis tanquam apices poſſunt adjici logarithmi. Ita loco fractionis $\frac{342857}{100000}$ ſcribimus: $3^{0}\ 4'\ 2''\ 8'''\ 5^{iv}\ 7^{v}$

COROLLARIUM. III.

347. Quoniam apices ( qui ſunt logarithmi denominatorum fractionum decimalium ) in ſerie numerorum naturalium progrediuntur; ſufficit notæ ultimæ adjici apicem convenientem, cæteris omiſſis, veluti in noſtro caſu $3.\ 42857^{v}$.

COROLLARIUM IV.

348. Cùm apices iſti omnes non tantùm ſunt logarithmi, ſed & characteriſticæ logarithmorum denominatorum ( §. 308. ) quivis apex ultimus fractionis decimalis erit characteriſtica logarithmi denominatoris. ( §. cit: ) conſequenter

COROLLARIUM V.

349. Cùm characteriſtica tot in ſe continet unitates quot denominator zeros ( 312. ) apex etiam ultimæ notæ tot continebit unitates, quot denominator zeros; ſed quot ſunt in denominatore zeri, tot notæ numericæ puncto ab integris ſecernuntur ( §. 281. ) Ergo quot notæ ab integris puncto ſecernuntur, tot unitatum erit apex notæ ultimæ; adeoquè omiſſis apicibus fractionis decimalis logarithmus ſciri poteſt: erit ſcilicet logarithmus earum tot unitatum, quot notæ ab integris puncto ſeparatæ. Ex: gr: fractionis 9 . 245 apex ſive logarithmus $'''$; ipſius 0 . 00345 logarithmus $v$.

DEFINITIO LXVII.

350. *Notæ* fractionum decimalium *ejuſdem*

*ordinis* dicuntur, quarum iidem ſunt denominatores vel apices

*Ex: gr: Si duæ fuerint fractiones decimales* 0. 42857. & 0. 0047, *notæ* 8 & 4 *ejuſdem ordinis ſunt, quoniam utriquè reſpondens denominator eſt* 1000 *vel apex* III; *nam* 8 *deſignat* $\frac{8}{1000}$ & 4 *denotat* $\frac{4}{1000}$ (345.)

## PROBLEMA XXXVIII.

351. *Fractiones decimales addere, vel à ſe invicem ſubtrahere.*

### RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam fractiones decimales eô modô quô numeri integri conſtant ex notis, quarum unitates in ratione decupla progrediuntur (§. 346. 44.) notis ejuſdem ordinis ſub ſe invicem collocatis, additio & ſubtractio eôdem modô etiam peragitur, ac in numeris vulgaribus (§. 86. 88.) Vide exempla.

I. Additionis.

| | |
|---|---|
| 3. 507824 | 0. 0638 |
| 0. 00003 | 0. 00569 |
| 51. 247. | 7. 123. |
| 54. 754854 | 7. 19249 |

II. Subtractionis.

| | |
|---|---|
| 2. 7896 | 0. 87942 |
| 0. 234 | 0. 08251 |
| 2. 5556 | 0. 79691 |

### SCHOLION.

352. *Et enuntiantur etiam eô modô quô numeri vulgares* (§. 49.)

## PROBLEMA XXXIX.

353. *Fractiones decimales per ſe invicem multiplicare.*

RESO-

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Si fractiones decimales ad formam numerorum integrorum reducantur ( §. 281. ) multiplicatio peragitur ut in integris ( §. 97. ) hoc unicè notatô, quòd siquidem apices sunt logarithmi denominatorum ( §. 346. ); pro facto eorundem in se invicem ( ut in multiplicatione fractorum fieri est necesse) (§. 210.) apices factorum secum adduntur. ( §. 322. 313. )

*Ex: gr: Si multiplicanda fuerit fractio decimalis* $\frac{42857}{100000}$ *per* $\frac{47}{10000}$ *hoc est* 0.42857 *per* 0.0047 *Multiplicatio peragitur communi more* (§. 97.) *Quoniam verò apex ultimus multiplicandi est* 5, *& multiplicatoris* 4 ( §. 349.); *summa* 9 *dat apicem ultimum producti. Unde apparet à sinistris adjiciendas esse tres cyphras, quarum prima puncto notata designat locum integrorum* ( §. 281. )

```
   0. 42857
     0.0047
 ----------
     299999
    171428
 ----------
0. 002014279
```

## PROBLEMA XLII.

354. *Fractionem decimalem per decimalem dividere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Si fractiones decimales ad formam numerorum integrorum reducantur ( §. 281. ) divisio peragitur ut in numeris integris ( §. 100. ) hoc unicè notatô, quod siquidem apices sunt logarithmi denominatorum ( §. 346. ) apex quoti inveniatur, si apex divisoris ab apice dividendi subtrahatur ( §. 322. 321. ) & dividendo adjungantur cyphræ, si divisor major fuerit.

*Ex: gr: Si* 0. 002014279 *dividatur per* 0. 0047, *quotus est* 0. 42857. ( §. 353. 184. ) *nimirum* 2014279 *dividitur per* 47, *ut obtineatur quotus* 42857. *Jam cum notae divisoris* 4 *conveniat apex* 3 *& notae dividendi*

*videndi* o *apex* 4, *differentia* 1 *eſt apex notae primae quoti* 4. *Cùm adeò quotus incipiat à partibus decimis ut omnia loca compleantur eidem praefigitur cyphra, cùm nullum fractioni adhaereat integrum* ( §. 281. )

SCHOLION.

355. *Advertatur & ſi in diviſione fractionum denominator unus per alium non dividatur, ſed quoniam diviſio multiplicationi contraria* ( §. 61. 174. ) *ſi inibi logarithmi denominatorum adduntur hic ſubtrahendi ſunt, ſed & ex ipſis logarithmis daretur à Nobis demonſtratio, niſi brevitati ſtuderemus. Caeterum non mirum minorem hic per majorem numerum dividi poſſe, fractio utiquè minor per majorem dividi poteſt.* ( §. 212. )

## PROBLEMA XXXIX.

356. *Invenire Logarithmum fractionis decimalis cujuſcunquè.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

I. Cùm fractio decimalis cum integris adhærentibus æquivaleat fractioni ſpuriæ. e.g. $8.735 = \frac{8735}{1000}$ ( §. 281. 194. ) logarithmus ejus habebitur per §. 334.

II. Quod ſi fuerit abſquè integris adhærentibus ex. gr. 0, 324 cùm ea æqualis ſit $\frac{324}{1000}$ ( §. 281. ) adeoquè fractioni propriè dictæ ( §. 194. ) logarithmus illius invenietur per §. 332. Invenietur adeò logarithmus fractionis decimalis cujuſcunquè. *Q. e. f. & d.*

SCHOLION.

357. *Craſſius ergo aliquod mendum typis irrepſiſſe arbitror, quàm ut vir tantus in Matheſi Volfius ea non viderit, qui* §. 366. *corollario IV. infert* pro obtinendo fractionis decimalis logarithmo logarithmum denominatoris, ſive characteriſticam ſolam denomi-

natoris

natoris à charaſteriſtica numeratoris ſubtrahendam, *id quod etiam in fractione decimali abſque integris adhaerentibus in exemplo à Nobis allato facit* §.367. *ponitque logarithmum dictae fractionis* 0 . 324 = —1 . 5105456. *ac denique generaliter pronuntiat:* Iidem ergo ſunt logarithmi fractionum decimalium, qui numerorum integrorum, niſi quod charaćteriſtica differant. *Quod niſi de ſolis* fractionibus cum integris adhærentibus verum eſt. Nam ſiquidem fractionis 0 . 324 logarithmo numeratoris = 2 . 5105456 & denominatoris 1000 = 3 . 0000000, logarithmus datæ fractionis erit — 0 . 4894544 (§.346. 332.)

DEFINITIO LXVIII.

358. ***Fractio decimalis exacta eſt***, quæ veram exhibet rationem partis quam deſignat ad totum.

*Ex.gr.* $0 . 8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ *exprimit rationem partis* 4 *ad totum* 5 *veram, cum ſit* 8 : 10 = 4 : 5. (§. 155.)

DEFINITIO LXIX.

359. ***Fractio decimalis approximans*** eſt, quæ rationem partis, quam deſignat, ad totum exhibet prope veram; nempe vel verâ majorem, vel minorem; defectu tamen aut exceſſu infra unitatem notæ ultimæ convenientem exiſtente.

Ex:gr: $\frac{3}{7}$ > 0 . 42857; ſed < 0.42858 (§.280.) *Exprimit adeo fractio approximans* $\frac{42857}{100000}$

$\frac{42857}{100000}$ *rationem nonnisi propè veram, defectu scilicet existente minore quam* $\frac{1}{100000}$ *& notantur subinde ad finem signo + aut. —*

PROBLEMA XL.

360. *Fractiones decimales approximantes addere, vel à se invicem subtrahere.*

RESOLUTIO.

Addantur & à se invicem subtrahantur, ut fractiones exactæ (§. 351.) & locus ultimus à dextris pro incerto habeatur. (§. 359.)

PROBLEMA XLI.

361. *Fractiones decimales approximantes per se invicem multiplicare.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Multiplicentur eô modo quô fractiones exactæ (§. 353.) & cùm aut unus, aut uterqué factor possit esse approximans diligenter attendatur, quousqué incertitudo in notis facti finistimis se extendat; id quod ex legibus ipsius multiplicationis, atqué additionis multiplorum incerti factoris apparebit. En exempla

I.

```
  4.56324+
      0.12
  --------
  912648
 456324
 ---------
 0.5475888
```

*Quoniam nota ultima multiplicandi 4, incerta factum quoqué 8 est incertum similiter multiplicatoris nota 1 ducta in incertum 4 producit 4, quod incertum additum certo 4 summam facit incertam 8, duae ergo notae 8&8 à dextris sunt incertae. Sed si fuerit uterqué factor ut in exemplo allato approximans, nulla nota certa erit in facto. Imò si ponatur unus factor minor exempli approximans nulla nota facti certa erit.*

II.

II.

```
  4.56324
     0.12 —
  -------------
   912648
  456324  —
  -------------
0.5475888
```

*Nam cùm per incertum 2 totus multiplicandus multiplicatur, to um factum est incertum, quod additum facto ex notis certis summam reddit incertam.*

## PROBLEMA XLII.

362. *Fractiones decimales approximantes per exactas decimales, aut contra, aut etiam approximantes per approximantes dividere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Dividantur ut §. 354 fieri præcepimus, & similiter ut in multiplicatione, cùm aut divisor, aut dividendus, aut denique uterque illorum possit esse fractio approximans, probè conspiciatur, quibus in notis dividendi certitudo notarum quoti evanescat, id quod leges divisionis *1mò*, & *2dò* multiplicationis quoti in divisorem exactum aut approximantem itemque subtractionis indicabunt.

Exemplum I.

```
0.02 ( 4.568+ ) 228.4+
       4
       ----
       0 5
         4
         ---
         16
         16
         -----
           8
           8
           ---
           0
```

*Cùm hic divisor exactus & dividendus tantùm approximans, ultima nota divisoris 2 in ultima nisi nota dividendi incerta continebitur* (§.359.) *adeoque ultima nota quoti solùm incerta evadit. Sed si ponas.*

Exempl: II.

```
0.02+ ( 4.568. )
```

*Quotus idem, sed totus incer-*

*incertus. Quod ſi fuerit*

Exempl: III.

```
3.82— ( 21.3456 ) 5.59 &c.
        19 10
        ─────
        2245
        1910
        ─────────
         3356
         3056
        ─────────
          300
```

*Hic nota 1ma 5 nonniſi certa eſt: nam diviſoris nota 1ma 3 certa in 21 certo utiquè certè continetur, poſtquam verò quotus iſte certus multiplicatur per incertam diviſoris notam 2, ac deinde multipla incerti in alias notas irrepunt (§. 361.) omnia incerta evadunt; hoc eſt à facto incerto etiam reſiduum poſt ſubtractionem incertum.*

SCHOLION.

363. *Alios caſus brevitatis cauſa praetermittimus.*

---

# CAPUT X.

## *De fractionibus ſexageſimalibus.*

DEFINITIO LXX.

364. Fractiones *ſexageſimales* ſunt, quarum denominatores creſcunt in ratione ſexagecupla.

SCHOLION.

365. *Si integrum ſit 1, fractiones iſtiuſmodi ſunt*

$\frac{1}{60}, \frac{1}{3600}, \frac{1}{216000}$ &c.

COROLLARIUM.

366. Quoniam logarithmi progreſſionis

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Geometricæ | 1, | 60, | 3600, | 216000, | &c. |
| Sunt | 0, | 1, | 2, | 3, | (§. 305.) Si |

fractio-

fractiones sexagesimales instar numerorum integrorum scribendæ, numeratoribus solitariè positis eô modo quô in fractionibus decimalibus ( §. 346. ) logarithmi locò denominatorum tanquam apices adjici possunt. *Ita locò fractionis* $\frac{3}{1}$ *scribimus* $3^{\circ}$ & *locò* $\frac{35}{60}$ *ponimus* $35'$, & $\frac{16}{3600} = 16''$ &c.

DEFINITIO LXXI.

367. Pars sexagesima integri dicitur *minutum primum*, pars sexagesima minuti primi *minutum secundum*, & sexagesima secundi *minutum tertium* & ita porro, dicuntur etiam scrupula.

COROLLARIUM.

368. Minuti adeò primi apex sive index est 1, secundi 2, tertii 3, & ita porro ( §. 366. )

SCHOLION.

369. *Hac ratione fractiones reducuntur ad numeros integros, ut integrorum instar tractari possint.*

PROBLEMA XLIII.

370. *Fractiones sexagesimales addere.*

RESOLUTIO.

Additio eôdem prorsus modô peragitur quô numeri heterogenei in unam summam colliguntur. ( §. 88. )

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Ex: gr: | $85^{\circ}$ | $46'$ | $8''$ | $15'''$ |
| | 17 | 20 | 15 | 40 |
| | | 14 | 18. | |
| | $53^{\circ}$ | $20'$ | $41''$ | $55'''$ |

PROBLEMA XLIV.

371. *Fractiones sexagesimales à se invicem subtrahere.*

RESOLUTIO.

Subtrahuntur eô modô quô numeri heterogenei (§. 91.)

Ex: gr: $\begin{array}{rrrr} 28^{\circ} & 15' & 4'' & 20''' \\ 17 & 29 & 18 & 45''' \\ \hline 10 & 45 & 45 & 35 \end{array}$

*Nimirum unitas mutuo accepta à ſpecie majore hic valet* 60. *Ita* $1'' = 60'''$ $1' = 60''$ $1^{\circ} = 60'$ (§. 367.)

## PROBLEMA XLV.

372. *Fractiones ſexageſimales per ſe invicem multiplicare.*

RESOLUTIO.

Multiplicatio hæc coincidit cum multiplicatione decimalium, niſi quod ex ſpecie minori abiiciatur toties ſexagenarius quoties fieri poteſt, & tot ſpeciei proximè majori addantur unitates, quoties ſexagenarius fuit abjectus (§. 367.) id quod diviſio per 60 prodit. (§. 195.)

*Ex: gr: Si multiplicandus* $3^{\circ}$ $15'$ $38''$ *multiplicator* $2^{\circ}$ $18'$ $47''$, *duc ſingulas partes multiplicandi* 1mò in 47, 2dò in 18, 3tiò in 2 : *Erit factum ex* 47 *in* 38 = 1786 *minutis quartis* = $29'''$ $46^{iv}$. *Scribuntur adeò* 46 *pro ſpecie minima infra lineam cum ſuo apice, &* 29 *reſervantur ſpeciei proxime ſequenti addenda: cum igitur factum ex* $47''$ *in* $15'$ = $705'''$ *additis* $29'''$ *prodibunt* $734''' = 12''$ $14'''$. *Scribuntur adeo* $14'''$ *infra lineam &* $12''$ *reſervantur facto proxime ſequenti ex* $3^{\circ}$ *in* $47''$ *addenda. Eôdem modô ubi perrexeris, obtinebuntur tandem facta partialia quæ in unam ſummam collecta exhibent factum quæſitum*

*quæsitum* 7°, 32′ 30″ 38‴ 46$^{iv}$, *aut si prope verum quæsieris* 7° 32′ 31″, *cum species proximè major dimidium illius superet, aut* 30 *major fuerit.* Vide exemplum.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3° | 15′ | 38″ | | |
| 2° | 18′ | 47″ | | |
| 2 33 | 14 | 46$^{iv}$ | | |
| 58 | 41 | 24 | | |
| 6 | 31 | 16 | | |
| 7° | 32′ | 30″ | 38‴ | 46$^{iv}$ |

S C H O L I O N.

373. *Propter tædia divisionis declinanda constructus est* Canon hexacontadon, *qui facta in species resoluta exhibet, veluti factum ex* 38 *in* 47 = 29, 46. *Ratio constructionis ex operatione in Problemate percepta patet; modo notetur, perinde ac in Abaco Pythagorico* (§. 94.) *factorum unum à latere, alterum in fronte Canonis describi.*

PROBLEMA XLVI.

374. *Fractiones sexagesimales per se invicem dividere.*

R E S O L U T I O.

Divisio peragitur ut in fractionibus decimalibus, nisi quod in multiplicatione quoti per divisorem tenenda sint, quæ paulo ante in multiplicatione præcepimus §. 372. & ubi species dividendi prima fuerit minor specie divisoris imâ, ista reducenda sit ad speciem proximè minorem, & sequenti addenda, ut divisioni sit locus.

*Ex: gr:* Si 7° 32′ 30″ 38‴ 46⁗ *dividere jubeamur per* 2° 18′ 47″; *quære quoties* 2 *in* 7 *continea-*

*contineantur, & quoti locô scribe 3°. Duc 3 in 2° 18′ 47″ & factum 6° 56′ 21″ subtrahe ex 7° 32′ 30″ ut relinquatur 36′ 9″. Junge residuo speciem sequentem 38 & divisionem eôdem modô continua, donec ea tandem fuerit absoluta, quemadmodum ex typo exempli manifestum.*

$$
\begin{array}{l}
2^\circ\ 18'\ 47''\ (\ 7^\circ\ 32'\ 30''\ 38'''\ 46^{IV}\ )\ 3^\circ\ 15'\ 38'' \\
\qquad\qquad\quad 6\ \ 56\ \ 21 \\
\hline
\qquad\qquad\quad\ \ 36\ \ 9\ \ 38 \\
\qquad\qquad\quad\ \ 34\ \ 41\ \ 45 \\
\hline
\qquad\qquad\quad\ \ \ 1\ \ 27\ \ 53 \\
\qquad\qquad\qquad\ 87\ \ 53\ \ 46 \\
\qquad\qquad\qquad\ 87\ \ 53\ \ 46 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

SCHOLION. I.

375. *Non absimili modo algorithmus fractionum aliarum quarumcunque absolvitur, quarum denominatores in ratione quacunque data progrediuntur, veluti in duodecupla, quae olim in divisione mensurae linearum obtinuit.* Sed non licet florenos, grossos, solidos per florenos, grossos, solidos multiplicare. ( §. 216. ) Multiplicatio verò decimalium & sexagesimalium cùm sit fractionum multiplicatio, apparenter tantùm homogeneorum est multiplicatio; sed revera divisio ( §. 211. )

# CAPUT XI.

## *De nonnullis praxim concernentibus.*

SCHOLION.

376. *Ut praxi etiam provideatur, magis necessaria in usu civili adnotabimus. Praeter alias varias & prope innumeras apud gentes mensuras haec sunt etiam.* MENSU-

4. *Grana* faciunt    1. *Digitum*
4. *Digiti*    1. *Palmum*
4. *Palmi*    1. *Pedem*

Ex 16. itaqué digitis Pes componitur, majori tamen quantitate Digitorum

1. *Pes* ( vulgo continet 12 ) ( apud Geometras 10 ) *Digitos*

1. *Digitus* ( vulgo 12 ) ( apud Geom: 10 ) *lineas*

377. *Pedum nonnullorum diverſitatem repraeſentat* Tabula ſequens. Si ſcilicet Pes Regius Pariſinus communi diviſione in 12 Digitos, Digitus in totidem lineas, linea in 10 particulas, atqué adeo univerſim in 1440 particulas dividatur.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Pes Regius Pariſinus | 1440 | Conſtantinopolitanus | 3120 |
| Rhenanus | $1391\frac{3}{10}$ | Bononienſis | $1682\frac{2}{5}$ |
| Romanus | 1320 | Argentorat: | $1282\frac{3}{4}$ |
| Londinenſis | 1350 | Norimberg: | $1346\frac{3}{4}$ |
| Svecicus | 1320 | Viennenſis | 1401 |
| Danicus | $1403\frac{2}{5}$ | Dantiſcanus | $1271\frac{1}{2}$ |
| Venetus | 1540 | Vilnenſis | 1446 |
| Halenſis | 1320 | | |

378. Bion (*a*) diverſitatem pedum ejuſmodi aſſignat. Si ſcilicet fuerit pes Regius Pariſinus 1440 particularum erit.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Rhenanus | 1390. | Viennenſis | 1400. |
| Romanus | 1660. | Dantiſcan: | 1750. |
| Londinenſis | 1350. | Amſterodamenſis | 1250. |
| Svecicus | 1210. | Bruxellenſis | 1601. |
| Venetus | 1430. | Mediolanenſis | 2640. |
| Conſtantinopolitanus | 3140. | Minor | 1761. |

Id quod ex originaria cujuſcunqué pedis exacta menſura reſolvendum foret. Priorem tamen pedum rationem aſſenſus communis omnium probat.

379. *Quemadmodum Pes, ita* ulna *pro varietate regnorum & urbium varia eſt.* Alexander ab Alexandro (*b*) *eam ita deſcribit.* Si ambas *inquit explices manus* & in longum protrahas, à pectore linea ducta ulna dicitur.

*Sunt quae ex pedibus 2, uti* noſtra Vilnenſis, Dantiſcana, Rhenana, *teſte* R. P. Reuſſ, *ſunt quae ex 3, uti* Viennenſis *perhibente* R. P. Froelich; *& ſunt ulnae quae ex paucioribus vel pluribus quam 3 pedibus componuntur; quemadmodum* ulna Pariſina *quae eodem* Bione teſte 3 *pedibus & 8 digitis pariſinis conſtat.*

380. *Cubitus* facit pedem cum dimidio. Eadem quoqué menſura eſt *Paſſus communis.*

*Orgia*

(*a*) *Traitè de la conſtruction & principaux Uſages des inſtrumens a la Haye*, 1723. *p.* 93.

(*b*) *lib:* 2. *cap:* 20. *Dierum Genialium.*

*Orgia* 6 pedes alio nomine: *Hexapeda.* Gallis *Toise.*

*Spithama* Eodem Alexandro ab Alexandro teſte *eſt menſura manûs expanſae à magno digito ad minimum quantum protenditur palmo. Sed ſi pollicem tantùm explices & indicem,* Lichas *nuncupatur.*

381. *Fuêre etiam Romanorum menſurae* Via,Iter & actus. *Iter* eſſe conſtitit(*ait laudatus Alexander*) jus eundi per fundum alienum hominis tantum.

*Actum* hominis & jumenti. *Viam* hominis jumenti & vehiculi.Via *in porrecto 8, in anfractu 16 pedes lata erat.*

Iter *pedes 4 tantùm latitudinis.* Actus *duplex*;ſimplex *ſcilicet* & quadratus.

Simplex, *pedes 4 latitudinis,longitudinis verò pedes 120 habebat.*

Quadratus, *qui in longitudinem & latitudinem 120 pedibus terminabatur. Is ipſe quadratus actus alio nomine* Plethrum *audiebat.* Unde *duo tales actus* Diplethrum.

382. *Jugerum* tantum terræ ſpatium, quod jugo boum uno die exarari poſſit. *longum fuit 240 latum verò 120 pedibus.* Itaqué *Diplethrum,* ſive 2 actus quadrati faciebant 1. jugerum.

| | |
|---|---|
| 6 Jugera | 1. Stadium |
| 8 Stadia | 1. Milliare Italicum |

Ita idem Alexander ab Alexandro l. cit. Id quod legitur 1. Reg: 14 v. 14. *In media parte jugeri,quam par boum in die arare conſvevit.* Noſtro idiomate reddit R.P. *Wujek: Na połowicy ſtaja, ktòre zwykło para wołòw na dzień zorać.* Conſentiuntqué Interpretes loci hujus.R. P. *Sanctius* jugerum (inquit) ſpatium eſt in agro, quod uno die, quaſi legitimè dimenſo par boum arat.

383. *Stadium* quoqué varium fuit. Sexcentos pe-

 des

des græcos teste Gellio (*c*) complectebatur, sed jam minores, jam majores. *Stadium Olympicum* Romanis pedibus 625 constabat referente Plinio (*d*). *Alexandrinum* verò 720 Romanis pedibus perhibente Weydlero (*e*) *Hippicum* 4, Dolichus 12 stadia complectebatur.

*Ægyptii Schaenis* utebantur; quorum uni Herodotus 60 stadia, Plinius verò 40 tantum tribuit.

*PersarumParasanga* 30 stadiis contineri perhibetur.

*Romanorum mensura in determinandis majoribus intervallis* milliare *fuit*, quod etiam vocabant *lapidem*, *inde* sumpto nomine, quòd scilicet *post mille passus*, seu 5000 pedes columnas viis in publicis erigerent.

384. Milliaris Germanici exactior quantitas ex his componitur.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | *Pedes* faciunt | 1 | *Passum*. sc: Geom: |
| 125 | *Passus* | 1 | *Stadium* |
| 8 | *Stadia* | 1 | *Milliare* Ital: |
| 2 | *Milliaria* Ital: | 1 | *Leucam* |
| 2 | *Leucae* | 1 | *Milliare* Germ: |
| 6 | *Vorstae Russorum* | 1 | *etiam Mill:* Germ: |

385. Dividuntur milliaria in minora media & maxima. Præcipuas communium milliarium diversitates sequens Tabula exhibet, quam ex R. P. Mangold desumpsimus.

| *Milliare Germanicum* | *Continet Pedes Rhenanos* |
|---|---|
| *Commune* | 20000 |
| *Gallicum* | 15270 |
| *Helveticum* | 26666 |
| *Italicum & Turcicum* | 5000 |
| *Polonicum* | 19988 |
| *Svecicum* | 30000 |
| *Anglicum* | 5454 |
| *Hollandicum* | 24000 |

Millia-

(*c*) *Noct: Attic: l.* 1.*c.* 1. (*d*) *Hist: nat:l.* 2.*c.* 23.
(*e*) *In Geograph: Gen:* §. 4.

Milliari Germanico maximo Pedes Rhenani paſſim adnumerantur 23716.

386. Accuratiùs definitur milliare per dimenſiones graduum terræ, cui uni 15 milliaria reſpondent, atqué adeò cùm circumferentia terræ 360 gradus complectatur, *Orbita terrae erit* 5400 *milliarium* (§. 276.) Unius ex his milliaris quantitas ex optimis dimenſionibꝰ ſtatuitur *pedum Pariſinorum* 22900 numerô rotundô, loco 22888.

## PROBLEMA XLVII.

387. *Data longitudine lineae in menſura e. g.* Pariſina 22900 *pedum, invenire eandem in menſura alia e,g.* Noſtra, *cujus ad priorem datur ratio.*

### RESOLUTIO.

Quoniam Pes Pariſinus eſt ad noſtrum ut 1440 ad 1446 (§. 377.) inferatur (§. 285.)

$1446 : 1440 = 29000 : 22804\frac{236}{241}$ Erit proinde milliare unum Orbitæ terræ 22804 cum dimidio fermè Pedum noſtratium. (§. 386.)

### COROLLARIUM I.

388. Non abſimili modo alijs menſuris definita ſpatia terræ ſive areæ in alia quavis menſura invenirentur. e.g. Si quæratur decempedæ Pariſinæ 100 quod decempedas Viennenſes faciant.

### COROLLARIUM II.

389. Quodſi quæratur e.g. Hexapedæ Pariſinæ 1000 quot decempedas Viennenſes faciant. Hexapedis in numerum pedum converſis, inquiruntur Pedes Pariſini reſpondentes pedibus datarum Hexapedarum (§. 284.) qui tandem in decempedas convertuntur (§. cit: & 100.)

*In noſtro caſu 1000 Hexapedae Pariſinae facerent* $583\frac{3}{4}$ *Decempedas Viennenſes.*

SCHOLION.

390. VARIA PONDERUM GENERA.
PONDERA MERCATORUM

| | | | |
|---|---|---|---|
| Centenarius | *Cetnar appendit* | 100 | Libras |
| Libra | *Funt* | 16. | Uncias |
| Uncia | *Uncya* | 2. | Semuncias |
| Semuncia | *Lot* | 4. | Drachmas |
| Drachma | | 4. | Denariolos |
| Denariolus | | 2. | Obolos |

391. PONDERA AURIFABRORUM
PRO ARGENTO

Selibra argenti ſive Marca

| | | |
|---|---|---|
| *Grzywna appendit* | 16. | Semuncias |
| Semuncia | 4. | Drachmas |
| Drachma | 4. | Denariolos |
| Denariolus | 2. | Obolos |

PRO AURO.

| | | |
|---|---|---|
| Bes auri ſive Marca | 24. | Carattos |
| Carattus | 4. | Grana |
| Granum | 3. | Granula |

392. PONDERA PHARMACOPÆORUM

| | | |
|---|---|---|
| Libra *continet* | 12. | Uncias |
| Uncia | 2. | Semuncias |
| Semuncia | 4. | Drachmas |
| Drachma | 3. | Scrupulos |
| Scrupulus | 20. | Grana |

Granum *Piperis grano mediocri aequiparatur.*

393. Sequens tabula ex R. P. Mangold deſumpta *librarum diverſitatem exhibet qua ratione ſcilicet reliquae à libra Hamburgenſi differant.*

Hambur-

Hamburgensia pondo 100 Æquiponderant

§ 112. Dantisci
§ 116. Rigæ
§ 105. Lisabonæ
§ 104. Livorni
§ 106. Seviliæ in Hisp:
§ $98.\frac{2}{51}$ Amstelodami
§ $101\frac{41}{53}$ Londini
§ $103.\frac{41}{53}$ Lipsiæ & Berolini
§ $93\frac{49}{107}$ Norimbergæ
§ $86\frac{22}{23}$ Viennæ & Ratisbonæ
§ $129\frac{38}{53}$ Vilnæ

*Tabulae partem ad 100 pondo per regulam trium reduximus* inferendo e.g. pro Amstelodamensi:

Hamb: Amste: H. A.

$$102 : 100 = 100 : 98\frac{2}{51}$$

394. *Pro* Invenienda verò ratione *nostrae cum Hamburgensi libra,* siquidem 4 Berolinensia pondo Vilnensibus 5 æquivalent. *Inferendum erat 1mò*

Berol: Hamb: B. H.

$$103\frac{41}{53} : 100 = 4 : 3\frac{47}{55}$$ & 2dò (§.14,285.)

Hamb: Viln: H. V.

$$3\frac{47}{55} : 5 = 100 : 129\frac{38}{53}$$

*Id quod adnotasse pro similibus casibus visum est.*

CAPUT

# CAPUT XII.

## *De Arithmetica calculatoria.*

### DEFINITIO.

395. *Arithmetica calculatoria* eſt, quæ characterum locò calculis utitur. In principiis verò utraque convenit.

### HYPOTHESIS I.

396. *Calculorum diſpoſitio ab imo ſurſum procedit, ita ut inferiores calculi unitates ſimplices deſignent, ſuperiores verò valoris augmentum decuplum exprimant.*

### HYPOTHESIS II.

397. Numerus 5 *unicô notatur calculô, qui laevam unitatum ita occupat, ut interjectum relinquatur ſpatium. Zerorum vicem calculi, ſibi ſuperimpoſiti ſupplent aut calculus ab aliis diſtinctus. In hac charta ſtellula ſignabit cyphras.*

### PROBLEMATA.

398. *Numerum quemcunqué e. g. 4680456. calculis deſignare.*

RESOL: Inferius unitates, ſuperius deinde Decades, centenarios &c. collocabis; ut Tabula exhibet.

| | | |
|---|---|---|
| Milliones | | oooo |
| Centenarii Mill: | o | o |
| Decades Millium | o | ooo |
| Millenarii | | * |
| Centenarii | | oooo |
| Decades | o | |
| Unitates | o | o |
| | | 4680456 |

### ADDERE

I. Calculos ita diſpone horizontaliter, ut ordinis ejuſdem unitates ſibi reſpondeánt. Deinde

II. Quemadmodum in Arithmetica vulgari, ab ordine

dine infimo initium operationis duces, & unitates decadum ordini proximè ſequenti per totidem calculos adiicies.

*Ex: gr: Dentur ſummandi. Erit ſumma*

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | o | oo |
| o | oooo | * | * |
| o oo | o | ooo | o oo |
| o ooo | o ooo | o o | oo |
| 578 | 458 | 1036 | 2072 |

## S U B T R A H E R E.

Subtrahendo ad minuendi dexteram collocato omnia fiunt ut in Arithmetica communi. Quodſi major è minori ſubtrahendus, calculus ex proxime ſequenti ordine pro decade inferiori ordini adjungendus.

| Minuendus | Subtrahen: | Differen: |
|---|---|---|
| o | | |
| ooo | o o | o o |
| o oo | o ooo | o oooo |
| o | oo | ooo |
| 1375 | 682 | 693 |

## M U L T I P L I C A R E.

Eodem modo multiplicatio peragitur, ut in Arithmetica decadica §. 97. Facta verò ſingula partialia operando inventa uni eidem columnæ addi poſſunt.

| Multiplican: | Multiplicat: | Fact: 1. | Fact: 2. | Fac: tot: |
|---|---|---|---|---|
| | | | o oo | o oo |
| oo | | oooo | * | o |
| ooo | | o oo | o oo | oooo |
| o | ooo | o | oooo | o |
| o ooo | oo | o o | * | o o |
| 2358 | 32 | 4716 | 70740 | 75456 |

DIVI-

## DIVIDERÆ.

Eadem lege dividuntur, ut §. 100. ſcilicet 6 in 12 continentur bis &c.

| Diviſor | Dividen: | Quotus | 2dum memb: | Reſiduum. |
|---|---|---|---|---|
| | o | | | |
| | oo | | | |
| o o | o ooo | | o o | |
| * | ooo | oo | o oo | o o |
| o ooo | oo | o | oo | oooo |
| 608 | 12832 | 21 | 672 | 64 |

FINIS ARITHMETICÆ.

D. O. M. G.

| ERRATA | | CORRIGE |
|---|---|---|
| Pagin: | Lin: | |
| 4. | 22. Confertur | infertur |
| 5. | 2. dimidium eſt | duplum eſt |
| 13. | 9 irrationalis | rationalis |
| | 29. patebatur | petebatur |
| 19. | 13. $(3+2)$ | $(3+2)4$ |
| 21. | 21. ſæpe enim diverſis | Sæpe enim idem diverſis |
| 23. | 28. centenari | centenarii |
| 24. | 20. & | &c. |
| 30. | 9. 38475. | 38476 |
| 35. | 7. denominationem | denominatorem |
| | 13. Corollarium I. | Corollarium III |
| 37. | 1. poſit | poſſit |
| 37. | 9. Superparparticularis | ſuperparticularis |
| 38. | 14. quartas ſi $1\frac{2}{3}$ | quartas, ſi $1\frac{3}{4}$ |
| 40. | 5. Si exponens fuerit 5 erit $8:3 = 1\frac{3}{5}$ | Si exponens fuerit $\frac{5}{8}$; erit $8:5 = 1\frac{3}{5}$ |
| 41. | 19. pro antecedente primæ & pro conſequente ſecundæ | pro antecedente ſecundæ, & pro conſequente primæ |
| 44. | 25. A ad B & C | A & B ad C |
| 45. | 18. $P:T = p:t$ | $P:T = p:t$ |
| Ibid: | $T:P = p:t$ | $T:P = t:p$, |
| 46. | 30. Eo etiam $A = C$ | Ergo etiam $A = C$ (§. 126.) |
| | 34. (§. 140.) | (§. 150.) |

| ERRATA | | | CORRIGE |
|---|---|---|---|
| Pagina | Linea | | |
| 47. | 32. | 156 | 155 |
| 48. | 5. | (§. 138) | (§. 148) |
| 51. | 23. | A:B < C:D | A:B < C:D. Ponamus A:B > C:D |
| 52. | 21. | (§. 160) | (§. 163) |
| 65. | 23. | $\frac{5}{72}$ | $\frac{54}{72}$ |
| 73. | 19. | a = $2^2$ | a = 2, $2^2$ |
| 74. | 14. | 46 | 64 |
| 77. | 32. | THEOREMA | PROBLEMA |
| 82. | 19. | Quadratum Partis II. | Quadratum Partis I. |
| 85. | 26. | 115610 | 115600 |
| 93. | 20. | AB : BC | AD : BC |
| 94. | 11. | (§. 152) | (142) |
| | 12. | (§. 141.) | (§. 157.) |
| 99. | 26. | = 70016 gr: 700 $\frac{4}{25}$ | = 1094 gr. : 700 $\frac{4}{25}$ |
| | 28. | 30)700( $\frac{10}{2330}$ | 30)700( 23 $\frac{10}{30}$ |
| 113. | 16. | (§. 403) | (§. 313.) |
| 117. | 9. | (§. 271.) | (§. 303.) |
| 120. | 28. | 2:471 : 1:235 | 2:4 = 1:235 |
| 124. | 15. | 3.7589982 | 3.7590632 |
| | 19. | 3.5589875 | 3.7589875 |
| 128. | 1. | 0.3679767 | — 0.3679767 |
| 134. | 12. | (§. 346. 332.) | (§. 356. 332.) |
| 140. | 7. | $46^v$ | 46 |
| 141. | 33. | quæſitum | menſurarum |
| 146. | 17. | 22804 $\frac{236}{241}$ | 28879 $\frac{161}{241}$ |
| | 18. | 22804 | 28879 |
| 148. | 7. | 101 $\frac{41}{53}$ | 105 $\frac{35}{53}$ |